MATEMÁTICA II

AUTORES
Patricia Rodrigues Fortes
Mariza Camargo
Cristiano Bertolini
Guilherme Bernardino da Cunha

LICENCIATURA EM COMPUTAÇÃO

MATEMÁTICA II

AUTORES
Patricia Rodrigues Fortes
Mariza Camargo
Cristiano Bertolini
Guilherme Bernardino da Cunha

1ª Edição
UAB/NTE/UFSM

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA

Santa Maria | RS
2019

PRESIDENTE DA REPÚBLICA FEDERATIVA DO BRASIL
Jair Messias Bolsonaro

MINISTRO DA EDUCAÇÃO
Abraham Weintraub

PRESIDENTE DA CAPES
Anderson Ribeiro Correia

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA

REITOR
Paulo Afonso Burmann

VICE-REITOR
Luciano Schuch

PRÓ-REITOR DE PLANEJAMENTO
Frank Leonardo Casado

PRÓ-REITOR DE GRADUAÇÃO
Martha Bohrer Adaime

COORDENADOR DE PLANEJAMENTO ACADÊMICO E DE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA
Jerônimo Siqueira Tybusch

COORDENADORA DO CURSO DE LICENCIATURA EM COMPUTAÇÃO
Sidnei Renato Silveira

NÚCLEO DE TECNOLOGIA EDUCACIONAL

DIRETOR DO NTE
Paulo Roberto Colusso

COORDENADOR UAB
Reisoli Bender Filho

COORDENADOR ADJUNTO UAB
Paulo Roberto Colusso

NÚCLEO DE TECNOLOGIA EDUCACIONAL

DIRETOR DO NTE
Paulo Roberto Colusso

ELABORAÇÃO DO CONTEÚDO
Janisse Viero, Liziany Müller Medeiros

REVISÃO LINGUÍSTICA
Camila Marchesan Cargnelutti
Maurício Sena

APOIO PEDAGÓGICO
Carmen Eloísa Berlote Brenner
Caroline da Silva dos Santos
Keila de Oliveira Urrutia

EQUIPE DE DESIGN
Carlo Pozzobon de Moraes
Juliana Facco Segalla – Diagramação
Matheus Tanuri Pascotini
Reginaldo Júnior – Diagramação
Raquel Bottino Pivetta
Lisiane Dutra Lopes

PROJETO GRÁFICO
Ana Letícia Oliveira do Amaral

F738m Fortes, Patricia Rodrigues
Matemática II [recurso eletrônico] / Patricia Rodrigues Fortes ... [et al.]. – 1. ed. – Santa Maria, RS : UFSM, NTE, UAB, 2019.
1 e-book : il.

Este caderno foi elaborado pelo Núcleo de Tecnologia Educacional da Universidade Federal de Santa Maria para os cursos da UAB
Acima do título: Licenciatura em Computação
ISBN 978-85-8341-245-8

1. Ciência da Computação 2. Matemática 3. Álgebra linear I. Universidade Federal de Santa Maria. Núcleo de Tecnologia Educacional II. Universidade Aberta do Brasil. III. Título.

CDU 512.64

Ficha catalográfica elaborada por Shana Vidarte Velasco - CRB-10/1896
Biblioteca Central da UFSM

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
PÁTRIA AMADA BRASIL
GOVERNO FEDERAL

CAPES
UAB UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL
Universidade Federal de Santa Maria 1960
PROGRAD UFSM
NÚCLEO DE TECNOLOGIA EDUCACIONAL

APRESENTAÇÃO

Prezado(a) Acadêmico(a):

Na grade curricular do Curso de Licenciatura em Computação, modalidade EaD, ofertado pela UFSM (Universidade Federal de Santa Maria) – Campus Frederico Westphalen, no âmbito da UAB (Universidade Aberta do Brasil), temos a disciplina Matemática II. Por intermédio desta disciplina esperamos capacitar os acadêmicos para contextualizar e inter-relacionar conceitos e propriedades matemáticas, para que possam utilizá-los em outras áreas do conhecimento e em aplicações variadas de situações reais.

No decorrer do período de oferta desta disciplina estudaremos tópicos de "Álgebra Linear", que se utiliza de alguns conceitos e estruturas fundamentais da Matemática como matrizes, determinantes, sistemas de equações lineares e vetores.

Pretendemos trabalhar todos estes conteúdos de Álgebra Linear com auxílio de tecnologias informáticas, a exemplo do software GeoGebra (aglutinação das palavras Geometria e Álgebra), que é um software livre de matemática dinâmica que reúne recursos de geometria, álgebra, gráficos, tabelas, probabilidade, estatística e cálculos simbólicos. Você pode fazer o download do software GeoGebra para instalação em seu Desktop pelo endereço: http://www.geogebra.org/cms/pt_BR/download/, clicando em More GeoGebra downloads, clicando em GeoGebra Classic for Desktop e então escolhendo adequadamente o sistema operacional (Windows, Linux ou Mac OSX). Após ao download, basta executar o programa de instalação. Quando elaboramos o texto deste livro a versão disponibilizada do software GeoGebra era 5.0.355.0 (abril de 2017).

Convidamos você a instalar o software GeoGebra e então estudar conosco os tópicos introdutórios de Álgebra Linear que especificamente compõem o conteúdo programático da disciplina de Matemática II, procurando conhecer um pouco mais alguns dos conceitos e estruturas fundamentais deste importante ramo da Matemática, que está fortemente associado à Computação.

ENTENDA OS ÍCONES

ATENÇÃO: faz uma chamada ao leitor sobre um assunto, abordado no texto, que merece destaque pela relevância.

INTERATIVIDADE: aponta recursos disponíveis na internet (sites, vídeos, jogos, artigos, objetos de aprendizagem) que auxiliam na compreensão do conteúdo da disciplina.

SAIBA MAIS: traz sugestões de conhecimentos relacionados ao tema abordado, facilitando a aprendizagem do aluno.

TERMO DO GLOSSÁRIO: indica definição mais detalhada de um termo, palavra ou expressão utilizada no texto.

SUMÁRIO

1

MATRIZES

INTRODUÇÃO

A Matemática é uma Ciência que possibilita o estudo de quantidades e formas, e se organiza a partir de uma linguagem própria, composta por regras e fórmulas que foram criadas para facilitar a vida humana. A Álgebra constitui um dos ramos da Matemática, na qual se estuda a manipulação formal de equações, operações matemáticas, polinômios e estruturas algébricas. A Álgebra é um dos principais ramos da denominada Matemática Pura, e se subdivide em: Álgebra Universal, Álgebra Abstrata, Álgebra Elementar, Álgebra Computacional e Álgebra Linear.

Os conteúdos que trabalharemos no decorrer deste livro são referentes à Álgebra, mais precisamente, à Álgebra Linear. E para iniciar o estudo abordaremos as matrizes, que, embora tenham surgido no século XIX, continuam a proporcionar experiências inovadoras à Matemática (a denominação "matriz" foi utilizada pela primeira vez em 1850, nos trabalhos do matemático inglês James Joseph Sylvester, 1814-1897). Uma matriz é caracterizada como sendo uma tabela, onde seus elementos estão dispostos em linhas e colunas.

Mesmo que não percebamos, as matrizes estão presentes em vários contextos de nosso cotidiano, desde cálculos efetuados por um computador ou mesmo na construção civil, o que configura a sua aplicação não só à Matemática, mas também em várias áreas, a exemplo da Informática, Economia, Física, Engenharias, etc.

Uma representação matricial, ou um sistema matricial, é muito utilizado na resolução de um sistema linear. Como os sistemas lineares serão estudados na Unidade 3 deste livro, passaremos agora, preliminarmente, ao estudo das matrizes.

1.1
NOTAÇÃO E PROPRIEDADES DAS MATRIZES

Para contextualizar a abordagem dos tópicos relacionados ao estudo das matrizes, vamos considerar as médias finais (hipotéticas) de desempenho escolar de três acadêmicos do Curso de Licenciatura em Computação da UFSM/UAB referentes a quatro disciplinas curriculares, observando o aproveitamento de cada aluno por disciplina. Vejamos o esboço desta situação no Quadro 1 a seguir:

QUADRO 1 - NOTAS DE TRÊS ACADÊMICOS EM QUATRO DISCIPLINAS

	LÓGICA MATEMÁTICA	INFORMÁTICA BÁSICA	LAB. DE MONTAGEM E MANUTENÇÃO	FUND. FILOSÓFICOS E SOCIOLÓGICOS DA EDUCAÇÃO
Acadêmico 1	6,2	7,1	6,8	8,0
Acadêmico 2	5,7	6,4	7,0	7,3
Acadêmico 3	7,2	8,2	6,9	7,8

FONTE: Autores

Para localizar a nota de um determinado acadêmico em uma das quatro disciplinas, devemos nos orientar na linha em que consta o nome daquele acadêmico e na coluna onde estão as notas da disciplina analisada. Por exemplo, se desejamos saber a nota do Acadêmico 3 em Informática Básica devemos observar o local de intersecção da última linha e da coluna onde constam as notas da referida disciplina, e assim encontraremos a nota 8,2.

Se passarmos a considerar as informações do quadro anterior somente a partir da disposição das notas em linhas e colunas, usando parênteses ou colchetes, teríamos:

$$\begin{pmatrix} 6{,}2 & 7{,}1 & 6{,}8 & 8{,}0 \\ 5{,}7 & 6{,}4 & 7{,}0 & 7{,}3 \\ 7{,}2 & 8{,}2 & 6{,}9 & 7{,}8 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} 6{,}2 & 7{,}1 & 6{,}8 & 8{,}0 \\ 5{,}7 & 6{,}4 & 7{,}0 & 7{,}3 \\ 7{,}2 & 8{,}2 & 6{,}9 & 7{,}8 \end{bmatrix}$$

Se optarmos por usar a notação dos parênteses e denominarmos essa tabela como sendo "A", então:

$$A = \begin{pmatrix} 6{,}2 & 7{,}1 & 6{,}8 & 8{,}0 \\ 5{,}7 & 6{,}4 & 7{,}0 & 7{,}3 \\ 7{,}2 & 8{,}2 & 6{,}9 & 7{,}8 \end{pmatrix}$$

Em tabelas assim, os números são chamados de elementos. As colunas são enumeradas da esquerda para a direita e as linhas de cima para baixo. Esse tipo de tabela disposta com linhas e colunas é chamada de matriz.

Uma matriz, por convenção, é representada por uma letra maiúscula do alfabeto (*A, B, C, ..., Z*), e seus elementos são representados pela respectiva letra minúscula, acompanhada de dois índices, sendo que o primeiro índice representa a linha e o segundo índice representa a coluna onde aquele determinado elemento está posicionado no interior da matriz.

Uma representação genérica de uma matriz A de ordem $m \times n$ ou seja, que apresenta m linhas e n colunas, apresenta a forma:

$$A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3j} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

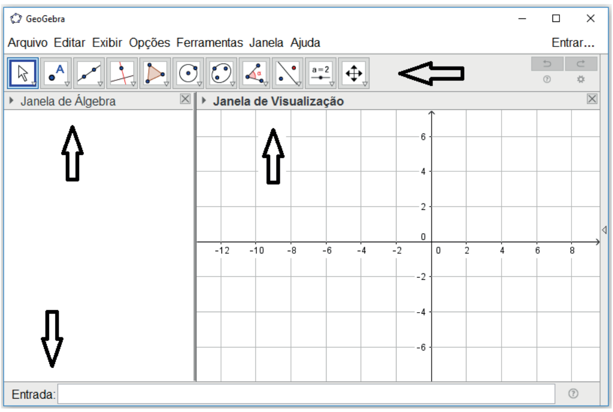
ou $A=(a_{ij})_{mxn}$ com $1 \leq i \leq j, 1 \leq j \leq n$ e $i, j \in N$. Lê-se: matriz *A* de elementos a_{ij} de ordem m × n.

ATENÇÃO

Convidamos você a iniciar a exploração do software GeoGebra junto conosco a partir de agora. Vamos definir uma matriz no software GeoGebra?

Observe na Figura 1 que o *layout* do GeoGebra é subdividido em: Barra de Menu, Janela de Álgebra, Janela de Visualização (ou janela gráfica) e Entrada. Inserimos cinco setas na imagem do *layout* do GeoGebra para chamar sua atenção para as localizações das barras e janelas.

Figura 1 – Layout do Software GeoGebra.



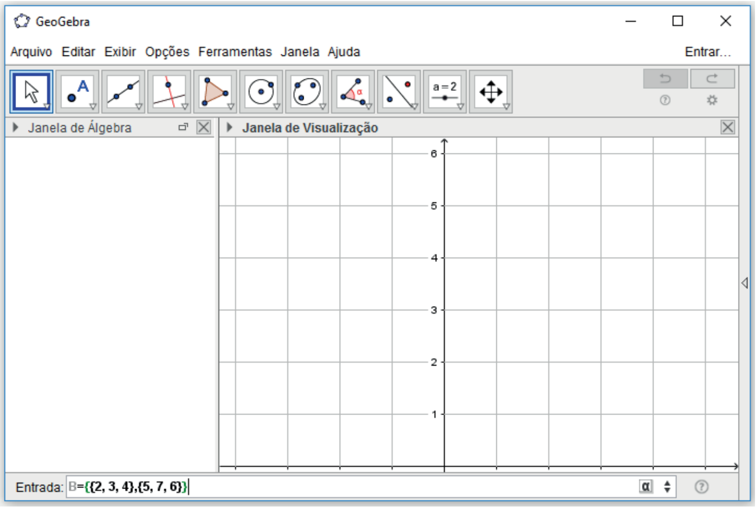
Fonte: Autores

Por exemplo, para definir no GeoGebra a matriz $B=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 6 \end{pmatrix}$, de ordem 2×3, ou seja, que apresenta duas linhas e três colunas, devemos inserir o cursor na posição Entrada e então digitar o comando: B ={ {2,3,4},{5,6,7} }, como mostrado na Figura 2.

ATENÇÃO

Observe que cada linha da matriz deve ficar definida entre chaves e com os respectivos elementos separados por vírgulas.

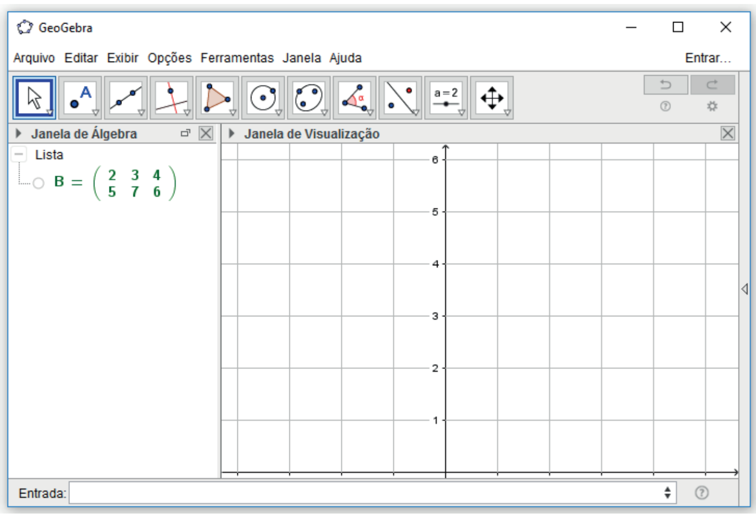
Figura 2 – Inserção de uma matriz no Software GeoGebra



Fonte: Autores

Em seguida ao comando B ={{2,3,4},{5,6,7}} tecle “enter” para que a matriz B esteja definida na Janela de Álgebra (Figura 3).

Figura 3 – Visualização da matriz B



Fonte: Autores

1.1.1. Tipo e Ordem de uma Matriz

As matrizes recebem certo tipo de nome dependendo da quantidade de elementos em suas linhas e colunas ou apenas por características específicas. A ordem de uma matriz refere-se ao número de linhas e colunas que compõem a matriz. A ordem é apresentada na notação $m \times n$, onde m é o número de linhas e n número de colunas. Lê-se "m por n" (ANTON; RORRES, 2001). Vejamos a seguir alguns tipos de matrizes.

- **Matriz linha:** matriz de ordem $1 \times n$, ou seja, com uma única linha.

Exemplo: Considerando no Quadro 1 apenas as notas do Acadêmico 1, nas quatro disciplinas, formamos a matriz linha do tipo 1×4:

$$C = \begin{pmatrix} 6{,}2 & 7{,}1 & 6{,}8 & 8{,}0 \end{pmatrix}.$$

- **Matriz coluna:** matriz do tipo $n \times 1$ ou seja, com uma única coluna.

Exemplo: Considerando no Quadro 1 as notas na disciplina de Lógica Matemática para os três acadêmicos formamos a matriz

$$D = \begin{pmatrix} 6{,}2 \\ 5{,}7 \\ 7{,}2 \end{pmatrix}, \text{ que apresenta ordem } 3 \times 1.$$

- **Matriz quadrada:** matriz do tipo $n \times n$, ou seja, com o mesmo número de linhas e colunas. Neste caso podemos simplesmente dizer matriz de ordem n.

Exemplo: Considerando no Quadro 1 as notas dos três acadêmicos nas disciplinas de Lógica Matemática, Informática Básica e Laboratório de Montagem e Manutenção formamos a matriz quadrada

$$E = \begin{pmatrix} 6{,}2 & 7{,}1 & 6{,}8 \\ 5{,}7 & 6{,}4 & 7{,}0 \\ 7{,}2 & 8{,}2 & 6{,}9 \end{pmatrix}$$

de ordem 3×3, ou simplesmente de ordem 3 (pois o número de linhas é igual ao número de colunas).

Em uma matriz quadrada definimos a diagonal principal e a diagonal secundária.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Diagonal secundária

Diagonal principal

A diagonal principal é formada pelos elementos a_{ij} nos quais i= j enquanto que a diagonal secundária é composta pelos elementos a_{ij} com $i + j = n + 1$.

Observe que no exemplo anterior, na matriz que denominamos E, os elementos da diagonal principal são: 6,2; 6,4 e 6,9 e os elementos da diagonal secundária são: 7,2; 6,4 e 6,8.

▸ **Matriz Nula:** matriz onde todos os elementos são nulos. Representamos uma matriz nula de ordem $m \times n$ por $O_{m \times n}$ e a matriz nula de ordem n (quadrada) por O_n.

Exemplos:

a) $O_{3\times 2}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Esta é uma matriz nula de ordem 3 × 2.

b) $O_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Esta é uma matriz nula de ordem 3 × 3, que por ser quadrada especificamos simplesmente como de ordem 3.

▸ **Matriz Diagonal:** toda matriz quadrada em que os elementos que não pertencem à diagonal principal sejam iguais a zero (nulos). Os elementos da diagonal principal podem ser iguais à zero ou não.

Exemplos:

a) $D_3=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$,

b) $E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$,

c) $F_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, Observe que a matriz F_3 caracteriza um exemplo de matriz nula e também de matriz diagonal.

▸ **Matriz Identidade:** matriz quadrada em que os elementos que pertencem à diagonal principal são iguais a 1 e o restante dos elementos são iguais a zero. É representada por I_n, sendo n a ordem da matriz.

Se preferirmos trabalhar com a lei de formação de uma matriz, podemos escrever a matriz identidade na forma:

$$I_n = [a_{ij}] \text{ em que } a_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$$

Exemplos:

a) $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

b) $I_1 = [1]$,

c) $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

d) $I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

▸ **Matriz Transposta:** se A for uma matriz de ordem $m \times n$, a matriz transposta de A, representada por A^T, é obtida a partir da matriz A, trocando-se ordenadamente as linhas por colunas ou as colunas por linhas. Assim, a matriz A^T terá ordem $n \times m$.

Exemplos:

a) $A_{3\times 2}=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 9 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^T_{2\times 3}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 5 & 9 & 7 \end{pmatrix}$,

b) $A_{3\times 1}=\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \Longrightarrow A^T_{1\times 3}=\begin{bmatrix} -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$,

c) $A=\begin{pmatrix} 8 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 6 & 11 & 9 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^T=\begin{pmatrix} 8 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 11 \\ 3 & 4 & 9 \end{pmatrix}$,

d) Podemos utilizar o software GeoGebra para obter a matriz transposta de uma dada matriz. Por exemplo, considerando

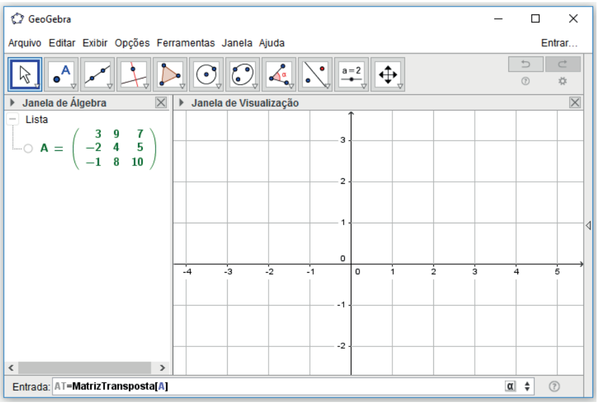
$$A=\begin{pmatrix} 3 & 9 & 7 \\ -2 & 4 & 5 \\ -1 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

devemos primeiramente definir esta matriz na área de Entrada digitando o comando:

A ={{3, 9, 7}, {–2, 4, 5}, {–1, 8, 10}}

Em seguida devemos clicar "enter" e voltar ao campo de Entrada para então definir uma denominação para a transposta de A (que denotaremos aqui por AT para retratar o cálculo da matriz transposta de A), seguida do comando que determinará a matriz procurada: AT =MatrizTransposta[A]. Acompanhe na Figura 4 a inserção deste comando no campo de Entrada do software GeoGebra.

Figura 4 – Comando para obtenção da Matriz Transposta

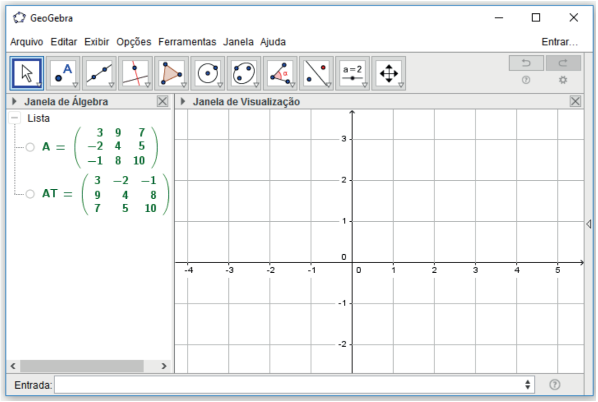


Fonte: Autores

Finalizado o comando para determinação da transposta da matriz A (tal como mostrado na Figura 4), devemos clicar "enter" e assim teremos obtido, na Janela de Álgebra, a matriz resultante da operação transposta (observe a matriz AT na Figura 5).

INTERATIVIDADE
Procure assistir vídeos que orientam a utilizar os comandos do software GeoGebra. Por exemplo, assista vídeos em https://www.youtube.com/watch?v=9-orPBR1TXo

Figura 5 – Matriz Transposta



Fonte: Autores

Propriedades da Matriz Transposta:

- Para qualquer matriz $A=(a_{ij})_{m \times n}$, tem-se que: $(A^T)^T = A$.
- Dadas as matrizes $A=(a_{ij})_{m \times n}$ e $B=(b_{ij})_{m \times n}$, tem-se que $(A+B)^T = A^T+B^T$.
- Dadas as matrizes $A=(a_{ij})_{m \times n}$ e $B=(b_{ij})_{n \times p}$, tem-se que $(AB)^T=B^TA^T$.
- Para qualquer matriz $A=(a_{ij})_{m \times n}$ e para qualquer número real não nulo k, tem-se que: $(kA)^T=kA^T$.

- **Matriz Simétrica:** matriz quadrada tal que $A=A^T$.

Como é possível observar facilmente nos exemplos que serão dados a seguir, em uma matriz simétrica os elementos simetricamente dispostos em relação à diagonal principal são iguais.

Exemplos:

a) $A=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ é simétrica pois $A=A^T$.

b) $B=\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ é simétrica pois $B=B^T$

c) $C=\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ não é simétrica uma vez que $C \neq C^T$, sendo $C^T=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$.

Observe que a desigualdade ocorreu justamente porque o elemento $C_{12} \neq C_{21}$.

Propriedades da Matriz Transposta:

- Se A é uma matriz simétrica e k é um número real não nulo, então kA é também uma matriz simétrica.
- Para qualquer matriz quadrada A, tem-se que $A+A^T$ é uma matriz simétrica.

▸ **Matriz Oposta:** a matriz oposta de uma matriz A é a matriz –A que é obtida trocando-se o sinal de todos os elementos de A. Assim, a matriz oposta de $A=(a_{ij})_{m\times n}$ é a matriz $-A=(-a_{ij})_{m\times n}$.

Exemplos:

a) $A=\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 3 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} \Longrightarrow -A=\begin{bmatrix} -2 & -6 \\ 1 & -3 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$.

b) $B=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \Longrightarrow -B=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}$.

▸ **Igualdade de Matrizes:** duas matrizes A e B, de mesma ordem $m \times n$, são ditas iguais se, e somente se, todos os seus elementos correspondentes (que ocupam a mesma posição) são iguais, ou seja:

$$A=B \iff a_{ij}=b_{ij} \text{ para todo } 1 \leq i \leq m \text{ e } 1 \leq j \leq n$$

Exemplos:

a) Dadas $A=\begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$. Neste caso temos $A = B$.

b) Dadas $C=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ e $D=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Neste caso temos $C \neq D$ uma vez que $c_{21} \neq d_{21}$.

ATENÇÃO:
Sugerimos que sejam efetuadas as atividades numeradas de 1 a 10 deste capítulo, uma vez que tais atividades são referentes aos conteúdos estudados até aqui. As atividades estão no final do capítulo.

1.2
OPERAÇÕES COM MATRIZES

Sendo que já analisamos os primeiros tópicos relacionados ao estudo das matrizes, conhecemos suas notações e propriedades, passaremos agora a estudar as operações matemáticas que podem ser efetuadas a partir das matrizes, como adição, subtração e multiplicação. Não deixe de refazer em seu caderno cada um dos exemplos abordados neste livro, eles servirão como um tutorial de aprendizagem.

1.2.1. Adição de Matrizes

Para adicionarmos duas ou mais matrizes é preciso que todas elas tenham o mesmo número de linhas e de colunas, ou seja, as matrizes devem ter mesma ordem. A soma dessas matrizes irá resultar em outra matriz que também terá o mesmo número de linhas e de colunas. Para efetuarmos a soma de matrizes, os termos deverão ser somados aos seus termos correspondentes (GIOVANNI; BONJORNO; GIOVANNI JR., 2002).

Então, dadas duas matrizes, A e B, as duas de ordem $m \times n$, teremos $A+B=C$, com C de ordem $m \times n$ onde $a_{ij}+b_{ij}=c_{ij}$.

Exemplo:

Dadas as matrizes $A_{3\times2}=\begin{bmatrix}1 & 8\\0 & 2\\5 & -1\end{bmatrix}$ e $B_{3\times2}=\begin{bmatrix}8 & -2\\2 & 4\\3 & 5\end{bmatrix}$, calcule a matriz $C=A+B$.

Sendo A e B matrizes de mesma ordem, para calcularmos a matriz C resultante da soma de A e B temos que somar os termos correspondentes, assim:

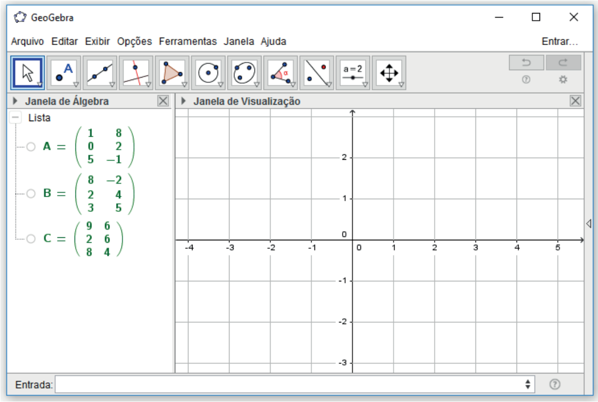
$$C=\begin{bmatrix}1 & 8\\0 & 2\\5 & -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}8 & -2\\2 & 4\\3 & 5\end{bmatrix}\Longrightarrow C=\begin{bmatrix}1+8 & 8-2\\0+2 & 2+4\\5+3 & -1+5\end{bmatrix}\Longrightarrow C=\begin{bmatrix}9 & 6\\2 & 6\\8 & 4\end{bmatrix}$$

Desta forma, obtemos a matriz $C_{3\times2}=\begin{bmatrix}9 & 6\\2 & 6\\8 & 4\end{bmatrix}$.

INTERATIVIDADE:

Procure utilizar o software GeoGebra para refazer o exemplo anterior, de soma de matrizes. Estando definidas as matrizes A(através do comando A={{1, 8},{0, 2},{5,- 1}}) e B (definida a partir comando B={{8, -2},{2, 4},{3, 5}}) no GeoGebra, obtemos a matriz soma escrevendo no campo de Entrada o comando seguido de um “enter” (Figura 6).

Figura 6 – MATRIZ TRANSPOSTA



Fonte: Autores

Propriedades da Soma entre Matrizes: Sejam A e B matrizes dadas e O a matriz nula, temos:

- Propriedade comutativa: $A+B=B+A$.
- Propriedade distributiva: $(A+B) + C = A + (B+C)$.
- Propriedade do elemento neutro da soma: $A+O=O+A=A$.
- Propriedade do elemento oposto da soma: $A+(-A)=(-A)+A=O$.

1.2.2. Subtração de Matrizes

Para podermos efetuar a subtração de duas matrizes, as matrizes subtraídas devem ter a mesma ordem (mesmo número de linhas e colunas), sendo que a matriz obtida com a subtração (matriz diferença) terá o mesmo número de linhas e colunas das matrizes subtraídas. As subtrações devem ocorrer com elementos correspondentes.

Assim, dadas duas matrizes, A e B, as duas de ordem $m \times n$. Então, A-B=C, com C de ordem $m \times n$, onde a_{ij}-b_{ij}=c_{ij}.

Exemplo:

Dadas as matrizes $A_{3\times 2}=\begin{bmatrix}1 & 8\\ 0 & 2\\ 5 & -1\end{bmatrix}$ e $B_{3\times 2}=\begin{bmatrix}8 & -2\\ 2 & 4\\ 3 & 5\end{bmatrix}$, calcule a matriz D=A-B.

Sendo A e B matrizes de mesma ordem, para calcularmos a matriz D resultante da diferença entre A e B temos que subtrair termos correspondentes, assim:

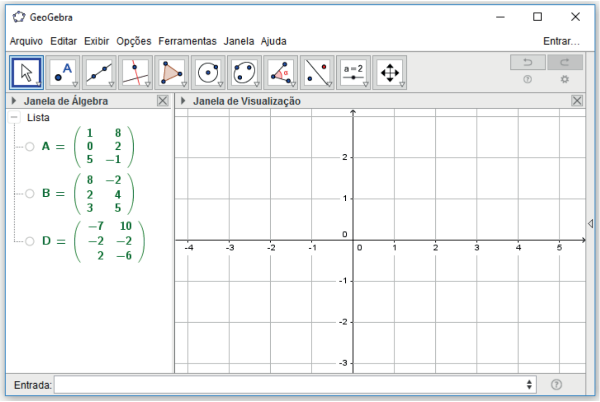
$$D=\begin{bmatrix}1 & 8\\ 0 & 2\\ 5 & -1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}8 & -2\\ 2 & 4\\ 3 & 5\end{bmatrix}\Longrightarrow D=\begin{bmatrix}1-8 & 8+2\\ 0-2 & 2-4\\ 5-3 & -1-5\end{bmatrix}\Longrightarrow D=\begin{bmatrix}-7 & 10\\ -2 & -2\\ 2 & -6\end{bmatrix}$$

Desta forma, obtermos a matriz $D_{3\times 2}=\begin{bmatrix}-7 & 10\\ -2 & -2\\ 2 & -6\end{bmatrix}$

INTERATIVIDADE:

Com uso do software GeoGebra, estando definidas as matrizes A (comando A={{1, 8},{0, 2},{5, -1}}) e B (comando B={{8, -2},{2, 4},{3, 5}}), obtemos a matriz diferença escrevendo no campo de Entrada o comando seguido de um "enter" (Figura 7).

Figura 7 – MATRIZ TRANSPOSTA



Fonte: Autores

1.2.3. Multiplicação de Matrizes

Dadas as matrizes $A=(a_{ij})_{m\times n}$ e $B=(b_{ij})_{n\times p}$, o produto de A e B é uma matriz $C=(c_{ij})_{m\times p}$ em que cada elemento c_{ij} é dado por

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}.b_{kj}$$

com $i= 1, 2, 3, \cdots, m$ e $j= 1, 2, 3, \cdots, p$.

Assim, temos que cada elemento da matriz C é obtido por meio da soma dos produtos dos elementos correspondentes da i-ésima linha de A pelos elementos da j-ésima coluna de B.

Observe que esta multiplicação só será possível se o número de colunas de A (denotado aqui por n) for exatamente igual ao número de linhas de B (por esta razão aqui também denotado por n). A matriz C resultante desta multiplicação terá ordem $m \times p$, que corresponde ao número de linhas de A e ao número de colunas de B.

Exemplo:

Dadas as matrizes $A_{2\times 2}=\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ e $B_{2\times 3}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}$, calcular a matriz $C=AB$.

Vamos efetuar passo a passo a multiplicação das matrizes $A_{2\times 2}=\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ e $B_{2\times 3}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}$, para exemplificar a obtenção de cada elemento da matriz $C_{2x3}=A_{2x2}B_{2x3}$.

Neste exemplo temos: $C=AB$, então

$$C=\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Teremos que determinar os seis elementos da matriz C, ou seja:

$$C_{2\times 3}=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix}$$

1º) Trabalhando com os elementos da 1ª linha de A e da 1ª coluna de B obtemos o elemento c_{11}:

$$C=\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$c_{11}=(4)(1)+(0)(7)=4.$$

2º) Trabalhando com os elementos da 1ª linha de A e da 2ª coluna de B obtemos o elemento c_{12}:

$$C=\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$c_{12}=(4)(0)+(0)(5)=0$$

3º) Trabalhando com os elementos da 1ª linha de A e B obtemos o elemento c_{13}:

$$C=\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$c_{13}=(4)(2)+(0)(3)=8$$

4º) Trabalhando com os elementos da 2ª linha de A e da 1ª coluna de B obtemos o elemento c_{21}:

$$C=\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$c_{21}=(2)(1)+(7)(7)=51$$

5º) Trabalhando com os elementos da 2ª linha de A e da 2ª coluna de B obtemos o elemento c_{22}:

$$C=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 2 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 7 & 5 & 3\end{bmatrix}$$
$$c_{22}=(2)(0)+(7)(5)=35$$

6º) Trabalhando com os elementos da 2ª linha de A e da 3ª coluna de B obtemos o elemento :

$$C=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 2 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 7 & 5 & 3\end{bmatrix}$$
$$c_{23}=(2)(2)+(7)(3)=25.$$

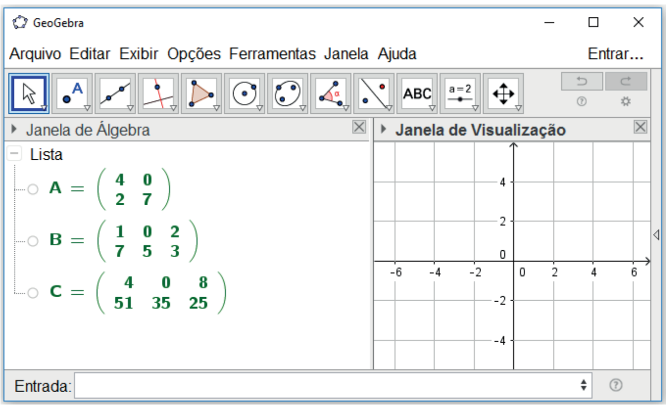
Terminadas as **multiplicações das linhas** de A pelas colunas de B concluímos o cálculo da matriz c_{23}:

$$C_{2\times 3}=\begin{bmatrix}4 & 0 & 8\\ 51 & 35 & 25\end{bmatrix}$$

INTERATIVIDADE:

Podemos facilmente realizar cálculos de multiplicação de matrizes através do software GeoGebra. Em termos do exemplo acima, é necessário primeiramente abrir uma Nova Janela e definir no campo de Entrada as duas matrizes A={{4, 0},{2, 7}} e B={{1, 0, 2},{7, 5, 3}}. Na sequência devemos inserir o comando C=A*B que atribui a denominação C ao efetivo cálculo da multiplicação das matrizes $A_{2\times 2}=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 2 & 7\end{bmatrix}$ e $B_{2\times 3}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 7 & 5 & 3\end{bmatrix}$ que já estavam definidas no software. Confira na Figura 8 a resposta correspondente à matriz C.

Figura 8 - Multiplicação de Matrizes



Fonte: Autores

ATENÇÃO:

Em geral, o resultado da multiplicação AB é diferente do resultado da multiplicação BA.

Quando trabalhamos com matrizes, a multiplicação não é comutativa. No exemplo anterior tínhamos as matrizes $A_{2\times 2}=\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ e $B_{2\times 3}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}$, sendo que

$$AB=\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 51 & 35 & 25 \end{bmatrix}$$

Contudo, neste caso não é possível realizar a multiplicação BA, pois o número de colunas da matriz B não condiz com o número de linhas da matriz A. Observe que a matriz B apresenta 3 colunas e a matriz A apenas 2 linhas:

$$BA=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$$

e assim a multiplicação não está definida.

Propriedades da Multiplicação de uma Matriz por Escalar: Para A e B matrizes de mesma ordem, k e l escalares e O a matriz nula, temos:

- Propriedade associativa da multiplicação: $(kl)\,A = k\,(lA)$.
- Propriedades distributivas: $k\,(A+B)=kA + kB$ e $(k+l)\,A = kA + lA$.
- Propriedades de Identidade Multiplicativa: $1\,A = A$.
- Propriedades multiplicativas do zero: $0\,A = O$ e $k\,O = O$.

Propriedades da Multiplicação de uma Matriz por Outra Matriz: Sejam A, B e C matrizes dadas, I a matriz identidade e O a matriz nula. Sempre que for possível efetuar os produtos indicados, de acordo com a definição do produto de matrizes, teremos:

- Propriedade associativa: $(AB)\,C = A\,(BC)$.
- Propriedades distributivas: $A\,(B+C) = AB + AC$ e $(B+C)\,A = BA + CA$.
- Propriedade do elemento neutro da multiplicação: $IA = A$ e $AI = A$.
- Propriedade do elemento nulo da multiplicação: $O\,A = O$ e $AO = O$.
- Multiplicação de matrizes não é comutativa: $AB \neq BA$.

Exemplo 1: Dadas as matrizes $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ se A^T é a matriz transposta de A, calcule A^T-3B.

Sendo $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ então $A^T=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ e como $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ então $3B=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ -3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$.

Desta forma

$$A^T - 3B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ -3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

e portanto

$$A^T - 3B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 6 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 2: (ENEM 2012, questão 169, Caderno Azul): Um aluno registrou as notas bimestrais de algumas de suas disciplinas numa tabela. Ele observou que as entradas numéricas da tabela formavam uma matriz 4 × 4, e que poderia calcular as médias anuais dessas disciplinas usando produto de matrizes. Todas as provas possuíam o mesmo peso, e a tabela que ele conseguiu é mostrada a seguir.

	1º Bimestre	2º Bimestre	3º Bimestre	4º Bimestre
Matemática	5,9	6,2	4,5	5,5
Português	6,6	7,1	6,5	8,4
Geografia	8,6	6,8	7,8	9,0
História	6,2	5,6	5,9	7,7

Para obter essas médias, ele multiplicou a matriz obtida a partir da tabela por:

a) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

Para resolver este problema precisamos fazer um cálculo de multiplicação de matrizes, uma vez que a nota anual de cada disciplina deve ser obtida pela soma das 4 notas bimestrais da disciplina com consequente divisão desta soma por 4, ou então, multiplicar cada uma das 4 notas por $\frac{1}{4}$ e então somá-las (média aritmética de quatro valores).

Escrevendo

$$M = \begin{bmatrix} 5{,}9 & 6{,}2 & 4{,}5 & 5{,}5 \\ 6{,}6 & 7{,}1 & 6{,}5 & 8{,}4 \\ 8{,}6 & 6{,}8 & 7{,}8 & 9{,}0 \\ 6{,}2 & 5{,}6 & 5{,}9 & 7{,}7 \end{bmatrix}$$

temos que M é uma matriz de ordem 4×4 então, para proporcionar uma soma dos elementos de cada linha divididos por 4 (média aritmética anual de cada disciplina) temos que multiplicar a matriz M por uma matriz ordem 4×1. Sendo assim, a matriz procurada está na alternativa "e".

Multiplicando a matriz M pela matriz dada na alternativa "e" obtemos:

$$\begin{bmatrix} 5{,}9 & 6{,}2 & 4{,}5 & 5{,}5 \\ 6{,}6 & 7{,}1 & 6{,}5 & 8{,}4 \\ 8{,}6 & 6{,}8 & 7{,}8 & 9{,}0 \\ 6{,}2 & 5{,}6 & 5{,}9 & 7{,}7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5{,}9+6{,}2+4{,}5+5{,}5}{4} \\ \frac{6{,}6+7{,}1+6{,}5+8{,}4}{4} \\ \frac{8{,}6+6{,}8+7{,}8+9{,}0}{4} \\ \frac{6{,}2+5{,}6+5{,}9+7{,}7}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5{,}5 \\ 7{,}1 \\ 8{,}0 \\ 6{,}3 \end{bmatrix}$$

Sendo assim, as médias anuais foram: Matemática = 5,5; Português = 7,1; Geografia = 8,0 e História = 6,3.

Exemplo 3: Em um campeonato de futebol obteve-se o seguinte resultado referente aos quatro times que disputaram a competição:

	Vitória	Empate	Derrota
Time A	2	0	1
Time B	0	1	2
Time C	1	1	1
Time D	1	2	0

Pelo regulamento do campeonato vale a seguinte tabela de pontuação:

Vitória	3 pontos
Empate	1 ponto
Derrota	0 pontos

Qual foi a classificação de cada um dos quatro times no final do campeonato?

Para solucionar este problema devemos realizar uma operação de multiplicação de matrizes:

$$\begin{matrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{matrix} \cdot \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{matrix} = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}$$

Assim, a classificação final foi: em 1º lugar o Time A com 6 pontos, em 2º lugar o Time D com 5 pontos, em 3º lugar o Time C com 4 pontos e em 4º lugar o Time B com apenas 1 ponto.

ATENÇÃO:
Sugerimos que sejam efetuadas as atividades numeradas de 11 a 16 deste capítulo, uma vez que tais atividades são referentes às operações com matrizes.

1.3
MATRIZ INVERSA

Dada uma matriz quadrada A, se existe outra matriz B que verifique $AB=BA=I$ (onde I é a matriz identidade), então dizemos que B é a matriz inversa de A e representamos por A^{-1}. Sendo assim, se A^{-1} é a inversa da matriz quadrada A teremos $AA^{-1}=A^{-1}A=I$.

Se a matriz A é invertível, sua inversa é única. Se A não admite inversa, diz-se que A é singular.

Exemplo: Dadas as matrizes $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix}-2 & \frac{3}{2}\\ 1 & \frac{-1}{2}\end{pmatrix}$, verifique se uma é inversa da outra.

Para realizar a verificação temos que multiplicar as matrizes e verificar se o resultado consiste em uma matriz identidade.

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & \frac{3}{2}\\ 1 & \frac{-1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1(-2)+3(1) & 1\left(\frac{3}{2}\right)+3\left(\frac{-1}{2}\right)\\ 2(-2)+4(1) & 2\left(\frac{3}{2}\right)+4\left(\frac{-1}{2}\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2.$$

Portanto, neste caso, a matriz B é inversa da matriz A. Podemos denotar $B=A^{-1}$. Ainda, por definição, podemos verificar que a matriz A é inversa da matriz B, uma vez que

$$BA=\begin{pmatrix}-2 & \frac{3}{2}\\ 1 & \frac{-1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2(1)+\frac{3}{2}(2) & -2(3)+\frac{3}{2}(4)\\ 1(1)+\left(\frac{-1}{2}\right)(2) & 1(3)+\left(\frac{-1}{2}\right)(4)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2.$$

1.3.1. Cálculo de uma Matriz Inversa

De acordo com a definição, para determinar a matriz inversa de uma matriz quadrada A de ordem n, basta descobrir uma matriz B tal que a multiplicação entre elas tenha como resultado uma matriz identidade de ordem n.

Uma maneira de determinar a inversa de uma matriz é através da multiplicação da matriz dada por uma matriz genérica, promovendo ainda a igualdade desta multiplicação a uma matriz identidade.

Exemplo: Calcule a inversa da matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Procuramos $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tal que $AA^{-1}=I_2$, então, substituindo as expressões de cada uma das três matrizes obtemos

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Realizando a multiplicação das matrizes do lado esquerdo ficamos com

$$\begin{pmatrix} 3a+2c & 3b+2d \\ 5a+4c & 5b+4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por igualdade de matrizes chegamos a dois sistemas lineares:

$$\begin{cases} 3a+2c=1 \\ 5a+4c=0 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} 3b+2d=0 \\ 5b+4d=1 \end{cases}$$

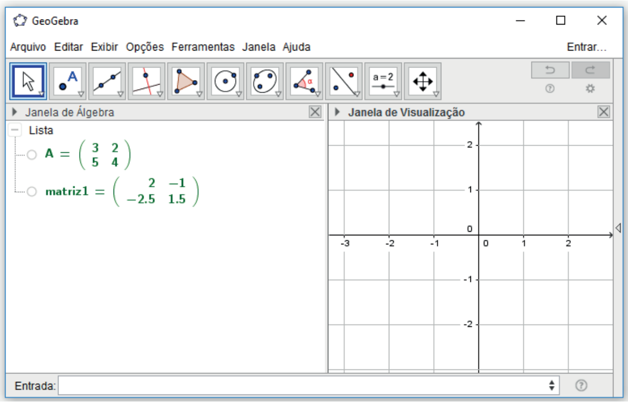
cujas soluções resultam em: $a=2, b=-1$ e $d=\frac{3}{2}$. Portanto, concluímos que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ \frac{-5}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

INTERATIVIDADE:

O software GeoGebra permite a obtenção de matrizes inversas, basta inicialmente definir a matriz (neste exemplo digitar A={{3, 2},{5, 4}} no campo de entrada e teclar “enter”) e em seguida digitar o comando correspondente ao cálculo da matriz inversa de A (digitar o comando MatrizInversa A no campo de entrada, seguido de “enter”). Na Figura 9 a matriz A e sua inversa, denotada automaticamente pelo software por matriz1 (pois não foi atribuída uma denominação específica).

Figura 9 - Matriz Inversa



Fonte: Autores

1.3.2. Dispositivo Prático para Cálculo de Matriz Inversa de Ordem 2x2

Seja A uma matriz de ordem 2×2, ou seja, $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Se $a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}\neq 0$, então a matriz A é invertível, e nesse caso

$$A^{-1}=\frac{1}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Se $a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}=0$ então a matriz A não é invertível.

Exemplo: Calcule a matriz inversa da matriz $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$.

Temos $a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}=(2)(5)-(2)(3)=10-6=4\neq 0$ portanto a matriz A é invertível. Pelo dispositivo prático

$$A^{-1}=\frac{1}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

sendo assim

$$A^{-1}=\frac{1}{(2)(5)-(2)(3)}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

ou seja

$$A^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

e finalmente obtemos

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{-3}{4} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Para ter certeza que a matriz obtida corresponde à matriz inversa de A, temos que verificar se o produto das duas matrizes resulta na matriz identidade. De fato:

$$A\,A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{-3}{4} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2)\left(\frac{5}{4}\right) + (3)\left(\frac{-1}{2}\right) & (2)\left(\frac{-3}{4}\right) + (3)\left(\frac{1}{2}\right) \\ (2)\left(\frac{5}{4}\right) + (5)\left(\frac{-1}{2}\right) & (2)\left(\frac{-3}{4}\right) + (5)\left(\frac{1}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

ATENÇÃO:
Sugerimos que sejam efetuadas as atividades numeradas de 17 a 23 deste capítulo, uma vez que tais atividades são voltadas ao cálculo de matrizes inversas.

Atividades – Unidade 1

1) Formular a matriz quadrada A, de ordem 2, cujos elementos que compõem a referida matriz são definidos pela lei de formação $a_{ij} = 3i - j$.

2) Seja a matriz $A = (a_{ij})_{3\times4}$ tal que $a_{ij} = \begin{cases} i+j, i=j \\ i^2, i \neq j \end{cases}$, calcule a soma dos elementos a_{13}, a_{22} e a_{34}.

3) Determine a soma dos elementos da diagonal principal com os elementos da diagonal secundária da matriz $A = (a_{ij})_{3\times3}$ em que $a_{ij} = 3 + 3i - j$.

4) Determine a soma dos elementos da matriz linha de ordem 1×5 que obedece a lei de formação dada por $a_{ij} = 2i^3 - 4j$.

5) Se uma matriz quadrada A é tal que $A^T = -A$, ela é chamada matriz antissimétrica. Sabe-se que M é uma matriz antissimétrica e:

$$M = \begin{pmatrix} 4+x & a_{12} & a_{13} \\ x & y+2 & a_{23} \\ y & z & 2z-8 \end{pmatrix}.$$

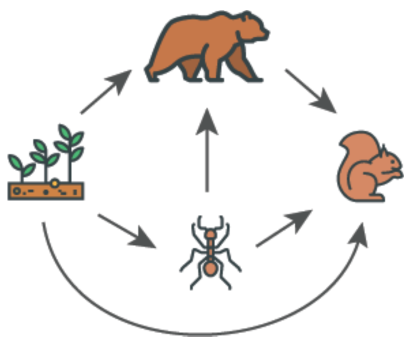
Assim, os termos a_{12}, a_{13} e a_{23} da matriz M devem valer respectivamente:

a) – 4, – 2 e 4
b) 4, 2 e – 4
c) 4, – 2 e – 4
d) 2, – 4 e 2
e) 2, 2 e 4

6) Escreva a matriz diagonal:

a) de ordem 3, em que $a_{ij} = 2i + j$ para $i = j$.
b) de ordem 4, em que $a_{ij} = 3i - j$ para $i = j$.

7) (Vestibular 2011-UFSM)



O diagrama dado representa a cadeia alimentar (simplificada) de um determinado ecossistema. As setas indicam a espécie de que a outra espécie se alimenta. Atribuindo valor 1 quando uma espécie se alimenta de outra e zero, quando ocorre o contrário, tem-se a seguinte tabela:

	URSO	ESQUILO	INSETO	PLANTA
URSO	0	1	1	1
ESQUILO	0	0	1	1
INSETO	0	0	0	0
PLANTA	0	0	0	0

A matriz $A=(a_{ij})_{4\times 4}$, associada à tabela, possui a seguinte lei de formação:

a) $a_{ij}=\begin{cases}0, se\ i\geq j\\1, se\ i<j\end{cases}$ b) $a_{ij}=\begin{cases}0, se\ i=j\\1, se\ i\neq j\end{cases}$ c) $a_{ij}=\begin{cases}0, se\ i\leq j\\1, se\ i>j\end{cases}$ d) $a_{ij}=\begin{cases}0, se\ i\neq j\\1, se\ i=j\end{cases}$

8) Determinar a e b para que as matrizes $\begin{pmatrix}6a+4b & 4\\4 & 6a-6b\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}14 & 4\\4 & -6\end{pmatrix}$ sejam iguais.

9) Seja $A=(a_{ij})$ uma matriz quadrada de ordem 2 tal que $a_{ij}=2i+2j$. Determine a, b, c e d para que se tenha $\begin{pmatrix}a+2b & 3c+d\\3a-2b & 2c+4d\end{pmatrix}=A$.

10) Uma empresa é formada por 4 lojas de jogos educativos, numeradas de 1 a 4. A matriz a seguir apresenta o faturamento (em reais) de cada loja nos 3 primeiros dias de março:

$$\begin{pmatrix}1.850 & 2.020 & 1.700\\1.400 & 1.650 & 1.620\\2.010 & 2.100 & 2.300\\2.100 & 2.120 & 2.000\end{pmatrix}$$

Cada elemento a_{ij} dessa matriz é o faturamento da loja i no dia j.
a) Qual foi o faturamento da loja 2 no dia 3?
b) Qual foi o faturamento de todas as lojas no dia 2?
c) Qual a maior fatura? Em que dia? E qual a loja?
d) Qual a menor fatura? Em que dia? E qual a loja?

11) Dadas as matrizes $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 0 & 1\\2 & -1 & -3\end{pmatrix}$ e $C=\begin{pmatrix}4 & -8\\1 & 0\end{pmatrix}$. Determine se possível:

a) $2A + C$　　b) AB
c) $B+C$　　d) BC
e) $(A - 3C)\,B$　　f) A^2

12) Em uma padaria são preparados três diferentes tipos de salgados, sendo que na preparação destes produtos são usadas porções de quatro ingredientes conforme indicado na tabela a seguir:

	OVO	FARINHA	AÇÚCAR	CARNE
PASTEL	3	6	1	3
EMPADA	4	4	2	2
QUIBE	1	1	2	6

Os preços dos ingredientes constam na tabela abaixo:

INGREDIENTES	PREÇO DA PORÇÃO (R$)
OVO	0,20
FARINHA	0,30
AÇÚCAR	0,50
CARNE	0,80

Qual, então, deve ser o preço base de venda de cada salgado?

13) Uma matriz quadrada A é dita idempotente se $A^2 = A$. Verifique se a matriz

$A=\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$ é idempotente.

14) Considere as matrizes

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 8 & 3 & -5 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix} \text{ e } A^T=\begin{pmatrix} -1 & 8 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & -5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Qual é o tipo correspondente à matriz $A + A^T$?

15) Uma empresa fabrica notebooks de modelos *A*, *B* e *C*, conforme mostra o Quadro A, e os custos e lucros de cada notebook estão representados no Quadro B.

QUADRO A

MÊS\MODELO	A	B	C
JANEIRO	2	1	4
FEVEREIRO	0	0	1
MARÇO	4	5	2

QUADRO B

MODELO\REAIS	CUSTO	LUCRO
A	1000	0
B	2000	1000
C	3000	2000

Com base nestes quadros, qual foi o custo e o respectivo lucro para cada mês?

16) Uma empresa de motos é composta pelas lojas *A* e *B*. Ao realizar uma pesquisa de aceitação de dois novos modelos de motos nos 5 primeiros dias do mês de dezembro, foram obtidos os seguintes resultados:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Sendo que:

- a matriz *A* descreve o desempenho da loja A, de modo que cada elemento a_{ij} é o número de unidades vendidas do modelo i no dia j;
- a matriz *B* descreve o desempenho da loja *B*, de modo que cada elemento b_{ij} é o número de unidades vendidas do modelo i no dia j;

1ª) Qual loja vendeu um número maior de motos de um determinado modelo? Qual o modelo? Quantas?
2ª) Como poderíamos representar, matricialmente, a quantidade vendida desses dois modelos, nas duas lojas, nos cinco primeiros dias de dezembro?
3ª) Como poderíamos representar, matricialmente, o desempenho da loja *A* em relação à loja *B*?

17) Verifique se a matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ é a matriz inversa da matriz $B=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

18) Utilize o software GeoGebra para calcular a inversa da matriz $M=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

19) Dadas as matrizes $A=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, calcule a expressão $AB-6A^{-1}$.

20) Quais dos itens seguintes apresentam matrizes inversas entre si?

a) $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

b) $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{-3}{4} \end{pmatrix}$

c) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{-3}{2} \end{pmatrix}$

Respostas das atividades

1) $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 5 & 4\end{pmatrix}$

2) Soma dos elementos a_{13}, a_{22} e a_{34} resulta em 14.

3) Soma dos elementos a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{31}, a_{22} e a_{13} resulta em 42.

4) Soma dos elementos de A resulta em –50.

5) Alternativa b.

6) a) $\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 9\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 8\end{pmatrix}$

7) Alternativa a.

8) *a=1 e b=2.*

9) $a=\frac{5}{2}, b=\frac{3}{4}, c=\frac{8}{5}, d=\frac{6}{5}$

10) a) R$1.620,00.
b) loja 1: R$2.020,00; loja 2: R$1.650,00; loja 3: R$2.100,00 e loja 4: R$2.120,00.
c) R$2.300,00; terceiro dia; loja 3.
d) R$1.400,00; primeiro dia; loja 2.

11) a) $2A+C=\begin{pmatrix}8 & -10\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

b) $AB=\begin{pmatrix}8 & 1 & 5\\ 2 & -1 & -3\end{pmatrix}$

c) Não é possível, pois B e C não têm a mesma ordem.
d) Não é possível, pois o número de colunas da matriz B não é igual ao número de linhas da matriz C.

e) $(A-3C)B=\begin{pmatrix}-4 & -23 & -79\\ -13 & -1 & -6\end{pmatrix}$

f) $A^2=\begin{pmatrix}4 & -3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

12) A multiplicação das duas matrizes nos dará o preço base (custo) de cada salgado. Assim, temos:

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}20 \\ 0{,}30 \\ 0{,}50 \\ 0{,}80 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5{,}30 \\ 4{,}60 \\ 5{,}80 \end{bmatrix}$$

Portanto, o preço base (sem prejuízo) de cada salgado deverá ser: Pastel: R$ 5,30; Empada: R$ 4,60 e Quibe: R$5,80.

13) $A^2 = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-2)(-2)+(2)(-3) & (-2)(2)+(2)(3) \\ (-3)(-2)+(3)(-3) & (-3)(2)+(3)(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} = A,$

portanto a matriz é idempotente.

14) Temos que a matriz $A + A^T$ é simétrica.

15)

$$\begin{array}{cc} \text{Custo} & \text{Lucro} \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 16.000 & 9.000 \\ 3.000 & 2.000 \\ 20.000 & 9.000 \end{pmatrix}$$

16) 1ª) Loja *A*; modelo 2; 5 unidades.

2ª) $A+B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 8 \end{pmatrix}$.

3ª) $A-B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

17) Sendo que $BA = I_2$, temos que a matriz B é a inversa da matriz A.

18) Pelo software GeoGebra obtemos:

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

19) $AB - 6A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$.

20) alternativas b e c.

21) $x \neq 4$.

22) $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{-5}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

23) $2A + 2AB^{-1} = \begin{bmatrix} 12 & 48 \\ 20 & 54 \end{bmatrix}$.

2

DETERMINANTES

INTRODUÇÃO

No estudo das matrizes definimos que uma matriz quadrada é aquela que apresenta o mesmo número de linhas e de colunas, ou seja, que é uma matriz de ordem $n \times n$. Nesta seção veremos que a toda matriz quadrada está associado um número denominado "determinante".

Há regras e propriedades que especificam as formas de cálculo de um determinante, e estes tópicos serão abordados ao longo deste capítulo, juntamente com algumas aplicações dos determinantes, que abordam, por exemplo, o cálculo da área de um triângulo situado no plano cartesiano, quando são conhecidas as coordenadas dos seus vértices. Uma outra aplicação dos determinantes está associada à resolução de alguns tipos de sistemas de equações lineares, tema que estudaremos no próximo capítulo deste livro.

Faremos neste capítulo uma grande abordagem das propriedades dos determinantes, que ao serem aplicadas em meio aos cálculos nos auxiliam em simplificações e muitas vezes acabam até mesmo nos permitindo a dispensar o processo algébrico utilizado para calcular um determinante.

Para calcular determinantes também teremos a oportunidade de usar o software GeoGebra, que nos permite a verificação de resultados e agiliza cálculos que se fossem realizados à mão demandariam bastante tempo.

Ainda, nas aplicações que abordam a resolução de problemas de determinação da área de triângulos por meio de determinantes, além da verificação de resultados, também teremos a possibilidade de elaborar gráficos no software GeoGebra. E a elaboração de gráficos de triângulos no plano cartesiano via software GeoGebra também vai nos possibilitar confrontar os resultados obtidos nos cálculos de área.

2.1
CÁLCULO DE UM DETERMINANTE

Iniciaremos este capítulo estudando as formas de cálculo de um determinante de acordo com a ordem da matriz associada. Abordaremos matrizes de ordem 1, de ordem 2, de ordem 3 (Regra de Sarrus) e também de ordem maior que 3 (conhecido Teorema de Laplace).

2.1.1. Determinante de uma Matriz de Ordem 1

Dada uma matriz quadrada de ordem 1, ou seja, que apresenta uma linha e uma coluna, o seu determinante é o próprio elemento a_{11}.

Assim, se $A = (a_{11})$ então $det\ (A) = |\,a_{11}| = a_{11}$.

ATENÇÃO: Representamos o determinante de uma matriz entre duas barras verticais, que não têm o mesmo significado de módulo.

Exemplos:

$A = (2)$ então $det\ (A) = |\,2| = 2.$

$B = (-5)$ então det $(B) = |-5| = -5.$

2.1.2. Determinante de uma Matriz de Ordem 2

Dada uma matriz de ordem 2, o seu determinante é o número real obtido pela diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária (GIOVANNI; BONJORNO; GIOVANNI JR., 2002), ou seja:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Longrightarrow det\ (A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Diagonal secundária

Diagonal principal

Exemplos:

1) Calcule o determinante da matriz de ordem 2, cujos elementos são dados por: $a_{ij} = 2i + j$.

Observamos que a matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, logo

$$det\ (A) = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 3(6) - 5(4) = -2.$$

2) Resolva a equação $\begin{vmatrix} 2 & x \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x \\ x & -2 \end{vmatrix}$.

Desenvolvendo cada determinante obtém-se:

$$(2)(-3) - (3)(x) = (1)(-2) - (x)(x)$$

$$-6 - 3x = -2 - x^2$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$x = 4 \quad \text{ou} \quad x = -1$$

$$S = \{-1, 4\}$$

2.1.3. Determinante de uma Matriz de Ordem 3 (Regra de Sarrus)

Dada uma matriz de ordem 3 (ou seja, estamos tratando de uma matriz quadrada que apresenta três linhas e três colunas), o seu determinante pode ser obtido utilizando uma regra prática denominada regra de Sarrus (GIOVANNI; BONJORNO; GIOVANNI JR., 2002).

Para proceder a aplicação da regra de Sarrus vamos considerar a matriz:

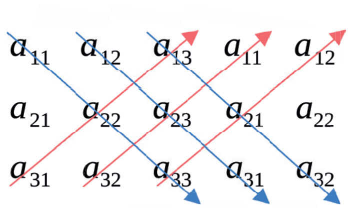
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Inicialmente temos que repetir a 1ª e a 2ª coluna à direita da matriz A, conforme especificado abaixo. Observe que neste caso vamos repetir a 1ª e a 2ª coluna da matriz somente para viabilizar a aplicação da regra de Sarrus, uma vez que a matriz A continua sendo originalmente de ordem 3×3.

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

Depois de repetidas as duas colunas, a regra de Sarrus estabelece que devemos seguir os traços diagonais especificados pelas setas e efetuar as multiplicações dos referidos termos posicionados em cada seta. Então, temos que conservar o sinal do produto correspondente à diagonal principal e dos outros dois produtos obtidos nas setas paralelas à diagonal principal, bem como temos que inverter o sinal do produto provindo da diagonal secundária e dos outros dois produtos obtidos nas setas paralelas à diagonal secundária.

Inverter os sinais destes três produtos



Conservar os sinais destes três produtos

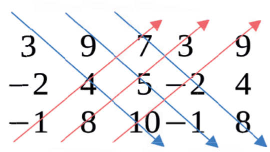
Ou seja, pela Regra de Sarrus temos:

$$det\ (A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Exemplos:

1) Calcule o determinante da matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 7 \\ -2 & 4 & 5 \\ -1 & 8 & 10 \end{pmatrix}$.

Pela regra de Sarrus, repetindo as duas primeiras colunas à direita da matriz A obtemos:



E assim

$$det\ (A) = (3)(4)(10) + (9)(5)(-1) + (7)(-2)(8) - (-1)(4)(7) - (8)(5)(3) - (10)(-2)(9)$$
$$det\ (A) = 120 - 45 - 112 + 28 - 120 + 180$$
$$det\ (A) = 51$$

2) Qual o valor de x que satisfaz a equação $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & 1 & x \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 11$?

As barras verticais em torno da matriz significam que devemos efetuar o cálculo de um determinante. Assim, repetindo a 1ª e a 2ª coluna à direita da matriz dada obtemos

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ x & 1 & x & x & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

e efetuando o cálculo do determinante pela regra de Sarrus chegamos à equação:

$$(1)(1)(2) + (2)(x)(1) + (3)(x)(0) - (1)(1)(3) - (0)(x)(1)(2)(x)(2) = 11$$
$$2 + 2x - 3 - 4x = 11$$
$$x = -6$$

Portanto:

$$S=(-6)$$

2.1.4. Determinante de uma Matriz de Ordem Maior que Três (Teorema de Laplace)

Antes de estudarmos o Teorema de Laplace, usado para cálculo de determinante de uma matriz de ordem maior que três, vamos definir o que é um cofator.

Cofator: Dada uma matriz $A = (a_{ij})$, quadrada de ordem n, com $n \in N$ e $n \geq 2$ denominamos cofator de a_{ij} o produto de $\mathbf{(-1)^{i+j}}$ pelo determinante D_{ij} da matriz que se obtém quando se retira de A a i-ésima linha e a j-ésima coluna. O cofator de a_{ij} será indicado por C_{ij}.

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$$

Por exemplo, considerando a matriz, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, de ordem 3, teremos

o cofator na forma:

$$C_{21} = (-1)^{2+1} D_{21}$$

e sendo D_{21} o determinante da matriz resultante da eliminação da 2ª linha e 1ª coluna da matriz A escrevemos

$$C_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

ou seja:

$$C_{21}=(-1)^{2+1}(a_{12}a_{33}-a_{32}a_{13}).$$

Exemplo:

Dada a matriz $A=\begin{pmatrix} 3 & 9 & 7 \\ -2 & 4 & 5 \\ -1 & 8 & 10 \end{pmatrix}$. Calcule os cofatores C_{11}, C_{22} e C_{32}.

$$C_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 8 & 10 \end{vmatrix}$$

$$C_{11}=(-1)^{2}[(4)(10)-(8)(5)]$$

$$C_{11}=0$$

$$C_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -1 & 10 \end{vmatrix}$$

$$C_{22}=(-1)^{4}[(3)(10)-(-1)(7)]$$

$$C_{22}=37$$

$$C_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$C_{32}=(-1)^{5}[(3)(5)-(-2)(7)]$$

$$C_{32}=-29$$

Teorema de Laplace: Considere a matriz $A = (a_{ij})$ quadrada de ordem n, com $n \in N$ e $n \geq 2$ o determinante dessa matriz é igual à soma dos produtos dos elementos de uma linha (ou de uma coluna) qualquer pelos respectivos cofatores. O teorema de Laplace pode ser utilizado para cálculo de determinante de matrizes (quadradas) de qualquer ordem, diferentemente da regra de Sarrus que somente pode ser utilizada no cálculo de determinantes de matrizes de ordem 3.

Veja como calcular o determinante de uma matriz $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ pelo teorema de Laplace escolhendo a 1ª linha:

$$det\ (A)=a_{11}C_{11}+a_{12}C_{12}+a_{13}C_{13}$$

$$det\ (A)=a_{11}(-1)^{1+1}D_{11}+a_{12}(-1)^{1+2}D_{12}+a_{13}(-1)^{1+3}D_{13}$$

$$det\ (A)=a_{11}(-1)^{2}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{12}(-1)^{3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}(-1)^{4}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Exemplo:

Calcule o determinante das matrizes $A=\begin{pmatrix} 3 & 9 & 7 \\ -2 & 4 & 5 \\ -1 & 8 & 10 \end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ usando o teorema de Laplace.

Escolhendo a 3ª linha da matriz teremos:

$$det\ (A)=a_{31}(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}+a_{32}(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}+a_{33}(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$det\ (A)=(-1)(-1)^{4}\begin{vmatrix} 9 & 7 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}+(8)(-1)^{5}\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}+(10)(-1)^{6}\begin{vmatrix} 3 & 9 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$det(A)=(-1)(1)[45-28]+(8)(-1)[15+14]+(10)(1)[12+18]$$

$$det(A)=-17-232+300$$

$$det\ (A)=51$$

No caso da matriz B, o cálculo do determinante se torna mais rápido se escolhermos a 2ª linha para aplicação do teorema de Laplace, uma vez que dois de seus elementos são nulos ($a_{21}=0$ e $a_{22}=0$) e assim tornam nulas duas multiplicações do cálculo do determinante.

$$det\ (B)=a_{21}(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}+a_{22}(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}+a_{23}(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}+a_{24}(-1)^{2+4}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

$$det\ (B)=0+0+(1)(-1)^{5}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 8 \end{vmatrix}+(4)(-1)^{6}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix}$$

sendo que ainda temos que calcular dois determinantes de ordem 3, o que pode ser efetuado, por exemplo, pela regra de Sarrus, e assim

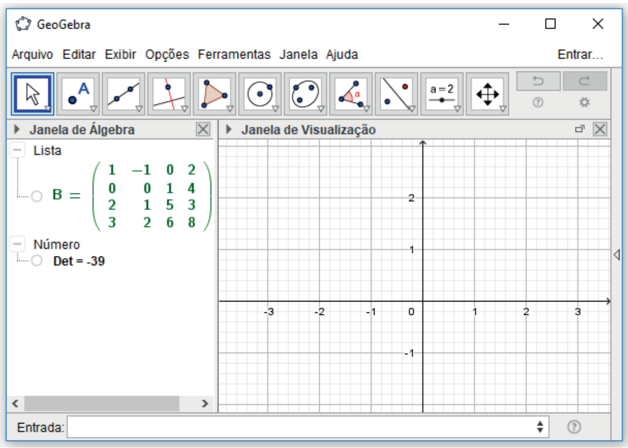
$$\det B = (-1)\begin{array}{ccccc} 1 & -2 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 8 & 3 & 2 \end{array} + (4)\begin{array}{ccccc} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 6 & 3 & 2 \end{array}$$

$$det\ B = (-1)[8 - 9 + 8 - 6 - 6 + 16] + (4)[6 - 15 - 0 - 0 - 10 + 12]$$
$$det\ B = -11 - 28 = -39.$$

INTERATIVIDADE:

Podemos conferir o valor obtido para o determinante da matriz *B* através do software GeoGebra. Primeiramente temos que definir os elementos que constituem a matriz *B*, ou seja, digitar no campo de Entrada o comando B={{1, –1, 0, 2}, {0, 0, 1, 4}, {2, 1, 5, 3}} e em seguida digitar o comando específico para cálculo do determinante da matriz *B*, ou seja, Det=Determinante (B). Na Figura 10 podemos visualizar a confirmação da resposta na Janela de Álgebra.

Figura 10 - Cálculo de Determinante



Fonte: Autores

2.2
APLICAÇÃO DO CÁLCULO DE DETERMINANTES

Sendo que já estudamos as regras que nos possibilitam efetuar cálculos de determinante, passaremos agora a utilizar este conceito na determinação de áreas de regiões triangulares. Esta é uma importante aplicação do cálculo de determinantes, que integra as áreas de Álgebra e Geometria.

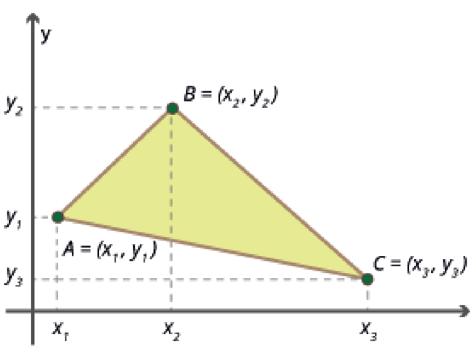
2.2.1. Área de uma Região Triangular

Se pretendemos calcular a área de um triângulo, podemos utilizar apenas as coordenadas cartesianas dos vértices que definem esta região triangular. Se denotarmos os três vértices do triângulo por $A=(x_1, y_1)$, $B=(x_2, y_2)$ e $C=(x_3, y_3)$, então o cálculo da área do triangulo ABC pode ser obtido pela expressão:

$$S=\frac{1}{2}|D| \quad \text{onde} \quad D=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Note que o parâmetro D corresponde ao determinante da matriz que contém as coordenadas dos vértices do triângulo ABC. Observe também que na expressão para o cálculo da área do triângulo ABC o parâmetro D está em módulo, ou seja, usaremos o seu valor absoluto por se tratar de um cálculo de área, que deve resultar em um valor positivo ou nulo (o valor correspondente à área será nulo quando os três vértices estiverem alinhados). Na Figura 11 temos um esboço de um triângulo com vértices em $A=(x_1, y_1)$, $B=(x_2, y_2)$ e $C=(x_3, y_3)$.

Figura 11 - Triângulo ABC



Fonte: Autores

Exemplo:

Determine a área do triângulo definido pelos vértices *A= (1, 2), B= (3, 5)* e *C= (5, 1)*. Para realizar este cálculo teremos que determinar primeiramente o parâmetro *D*, sendo que na sequência vamos avaliar

$$S=\frac{1}{2}|D| \quad \text{onde} \quad D=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Então, substituindo os valores das coordenadas dos vértices *A= (1, 2), B= (3, 5)* e *C= (5, 1)* temos:

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

e utilizando a regra de Sarrus:

$$D=\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 1 & 3 & 5 \\ 5 & 1 & 1 & 5 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c} D=5+10+3-25-1-6 \\ D=-14 \end{array}$$

portanto:

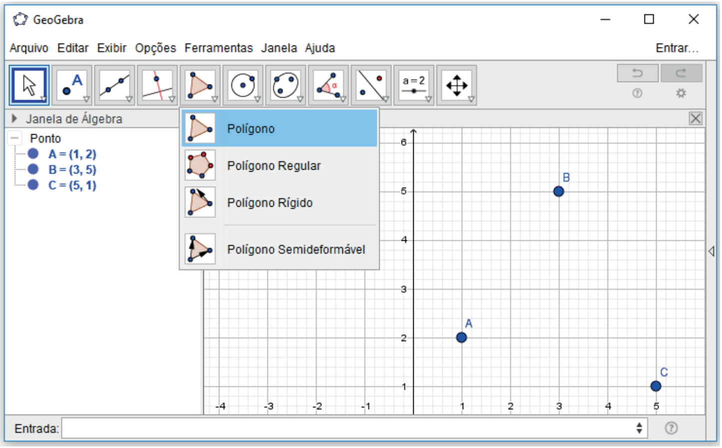
$$S=\frac{1}{2}|-14| = \frac{1}{2}(14)=7u.a.$$

Ou seja, o valor correspondente à área da região triangular situada entre os vértices *A= (1, 2), B= (3, 5)* e *C= (5, 1)* é *7 u.a.* (unidade de área).

INTERATIVIDADE:

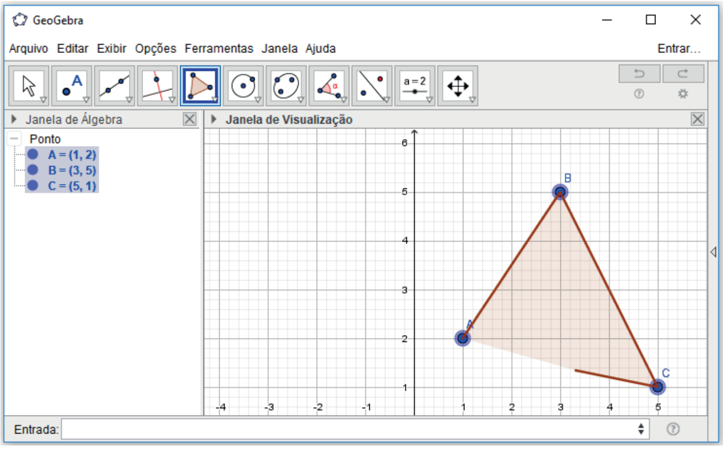
A veracidade do valor obtido (através do cálculo de um determinante) para a área do triângulo *ABC* pode ser constatada no software GeoGebra. Para elaborar tal figura no software GeoGebra temos que informar as coordenadas dos três vértices (ou seja, no campo de entrada do GeoGebra digitar as coordenadas dos três pontos A= (1, 2), B= (3, 5) e C= (5, 1)), em seguida devemos usar o comando “Polígono” (no 5º ícone) para circundar os três pontos (observe a localização do comando “Polígono” na Figura 12 e o polígono *ABC* já esboçado na Figura 13). Finalmente, usando o comando “área” (no 8º ícone), devemos clicar sobre o polígono *ABC* (observe seleção do comando “Área” na Figura 14). O valor referente à área do triângulo *ABC* será informado na Janela de Visualização e na Janela de Álgebra do GeoGebra (verifique na Figura 15).

Figura 12 - Comando “Polígono”



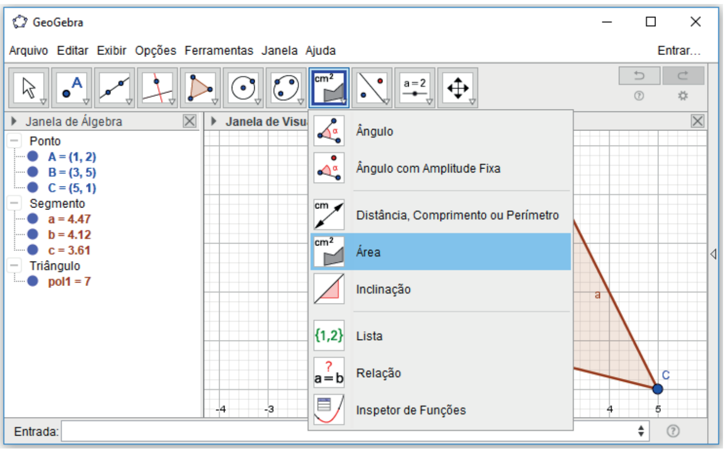
Fonte: Autores

Figura 13 - Circundando os vértices com o comando “Polígono”



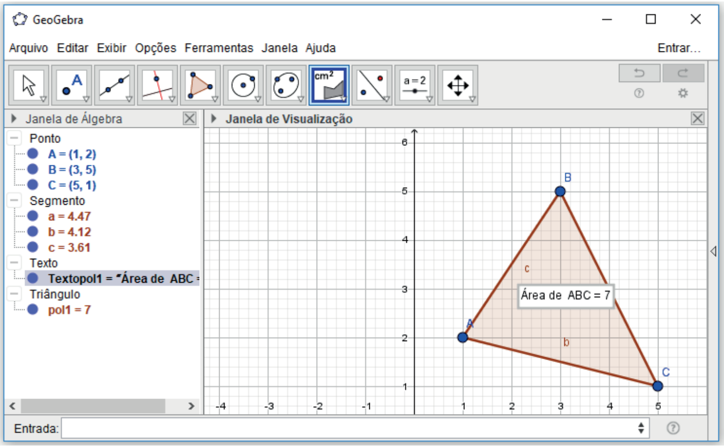
Fonte: Autores

Figura 14 - Seleção do comando “Área”, no 8º ícone e 4º comando



Fonte: Autores

Figura 15- Área do triângulo ABC calculada pelo GeoGebra



Fonte: Autores

2.3

PROPRIEDADES DOS DETERMINANTES

1ª propriedade: Se todos os elementos de uma linha ou coluna de uma matriz quadrada forem nulos, o seu determinante será zero.

Exemplo: Se $C = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 7 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 8 & 10 \end{pmatrix}$, então $\boldsymbol{det}\ (C) = \begin{vmatrix} 0 & 9 & 7 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 8 & 10 \end{vmatrix} = 0.$

2ª propriedade: Se os elementos correspondentes de duas linhas (ou de duas colunas) de uma matriz quadrada forem iguais, seu determinante será nulo.

Exemplo: Se $E = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 7 \\ 3 & 9 & 7 \\ -1 & 8 & 10 \end{pmatrix}$, então $\boldsymbol{det}\ (E) = \begin{vmatrix} 3 & 9 & 7 \\ 3 & 9 & 7 \\ -1 & 8 & 10 \end{vmatrix} = 0$

3ª propriedade: Se uma linha (ou coluna) de uma matriz quadrada for combinação linear de outras linhas (ou colunas), seu determinante será nulo.

Exemplo: Dada a matriz $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ -3 & 5 & -2 \\ 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$ em que a terceira linha é a soma

da primeira com a segunda linha, ou seja, a terceira linha é uma combinação linear

da primeira com a segunda linha, logo $\boldsymbol{det}(A_1) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ -3 & 5 & -2 \\ 0 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

4ª propriedade: Se uma matriz quadrada possui duas linhas (ou colunas) proporcionais, seu determinante será nulo.

Exemplo: Se $B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 2 & 7 & 3 \\ 10 & 8 & 2 \end{pmatrix}$, então $\boldsymbol{det}\ (B) = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 2 & 7 & 3 \\ 10 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 0$, uma vez que a 3ª linha é proporcional à 1ª linha ($L_3 = 2L_1$).

5ª propriedade: O determinante de uma matriz quadrada é igual ao determinante de sua transposta.

Exemplo: Sendo $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ temos $det\ (A)= -5$ e para $A^T=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

também teremos $det\ A^T= -5$.

6ª propriedade: Se trocarmos de posição entre si duas linhas (ou duas colunas) de uma matriz quadrada, o determinante da nova matriz é o oposto do determinante da primeira matriz.

Exemplo: Se $M=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, temos que $det\ (M)= 9+20+6-24-45-1=-35$.

Agora, trocando as posições da 1ª e 3ª coluna de M obtemos a matriz $N=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,

sendo que $det\ (N)= 24+45+1-9-20-6=35$ que é o oposto do $det\ (M)$.

7ª propriedade: Se multiplicarmos todos os elementos de uma linha (ou de uma coluna) por um número real k, então o determinante da nova matriz é o produto de k pelo determinante da matriz inicial.

Exemplo: $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $det(A)=-2$ e $B=\begin{pmatrix} 6 & -9 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, então $det\ (B)=$ $3(-2)=-6$.

8ª propriedade: Se todos os elementos de uma matriz quadrada situados de um mesmo lado da diagonal principal forem nulos, o determinante da matriz será igual ao produto dos elementos da diagonal principal.

Exemplo: Dada a matriz quadra $N=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 0 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, temos que o determinante da matriz N (denominada matriz triangular superior) corresponde à multiplicação dos temos de sua diagonal principal: $det\ (N)= (-2)(9)(8)= -144$

9ª propriedade: Se uma matriz quadrada M de ordem n é multiplicada por um número real k, o seu determinante fica multiplicado por k^n isto é:

$$det(kM_n) = k^n detM_n.$$

Exemplo: Seja $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ com $detA = -23$. Multiplicando esta matriz (de ordem 2) pelo número real 3 temos:

$$3A=\begin{pmatrix} (3)(2) & (3)(5) \\ (3)(3) & (3)(-4) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 15 \\ 9 & -12 \end{pmatrix}$$

Assim, pela 9ª propriedade dos determinantes temos que $det(3A)$ será igual ao $det(A)$ multiplicado por 3^2, ou seja:

$$det(3A) = (3^2)(-23) = -207$$

e de fato temos:

$$det(3A) = (6)(-12) - (9)(15) = -72 - 135 = -207.$$

10ª propriedade (Teorema de Binet): Sendo A e B duas matrizes quadradas de mesma ordem e AB a matriz-produto de A por B, então $det(AB) = det(A)\,det(B)$.

Exemplo: Sejam $A=\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}$, $det(A) = -4$ e $B=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$, $det(B) = -13$

Temos que:

$$AB=\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 19 & -4 \end{pmatrix}$$

Logo:

$$det(AB) = (6)(-4) - (19)(-4) = 52$$

Contudo, este mesmo resultado podemos encontrar usando a 10ª propriedade dos determinantes, ou seja:

$$det(AB) = det(A)\,det(B) = (-4)(-13) = 52.$$

2.4
DETERMINANTE DE UMA MATRIZ INVERSA

No estudo das matrizes vimos que $A\,A^{-1} = I$, sendo a matriz A^{-1} inversa de A e I a matriz identidade, todas de mesma ordem.

Assim, da relação $A\,A^{-1} = I$ podemos escrever $det\,(A\,A^{-1}) = det(I)$. Mas como $det\,(I_n) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, escrevemos então que $det\,(A\,A^{-1}) = 1$. Aplicando o teorema de Binet (10ª propriedade dos determinantes) escrevemos

$$det\,(A)\;\;det\,(A^{-1}) = 1$$

e supondo podemos concluir:

$$det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$$

Se $det\,(A) = 0$, não existirá matriz inversa.

Atividades – Unidade 2

1) Calcule o valor dos determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 5 & -5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} \sqrt{5} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{5} \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 0 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -5 & 4 \\ 1 & 3 & -4 & 3 \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} 0 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -5 & 4 \\ 1 & 3 & -4 & 3 \end{vmatrix}$

2) Na equação a seguir, envolvendo determinantes, encontre os valores reais de *x*.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 7 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & x & 1 \\ 3 & 3x & 0 \\ -3 & x & 2 \end{vmatrix} = 14$$

3) Sendo $A \cdot B$ o produto das matrizes $A = \begin{pmatrix} x & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, calcule o valor (ou valores) de $x \in R$ para que o determinante de $A \cdot B$ seja nulo.

4) Determine o conjunto solução das equações, aplicando a regra de Sarrus:

a) $\begin{vmatrix} 5 & x & 3 \\ 3 & -3 & 2 \\ 2 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} -3 & 4 & x \\ 6 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$

5) Resolva as equações

a) $\begin{vmatrix} 3(x-1) & -(x-3) \\ x+3 & x+1 \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} \frac{4}{5} & 2 & 0 \\ \frac{2}{3} & x & x \\ 0 & 3 & \frac{5}{4} \end{vmatrix} = 0$

6) Calcule os determinantes aplicando as propriedades. Indique a propriedade utilizada.

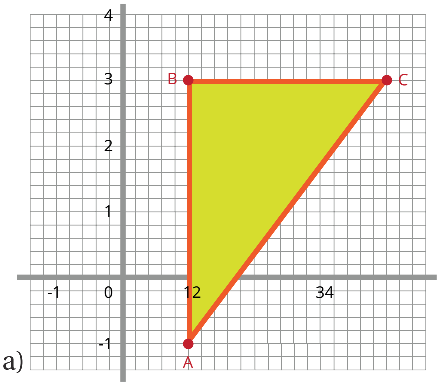
a) $\begin{vmatrix} 3 & 9 & 0 \\ 2 & 7 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 7 & 9 & 8 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 7 & 8 & 3 & 5 \\ 9 & 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ -3 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 8 \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 9 \\ -3 & -2 & 2 & 3 \\ 8 & 8 & 5 & 6 \end{vmatrix}$

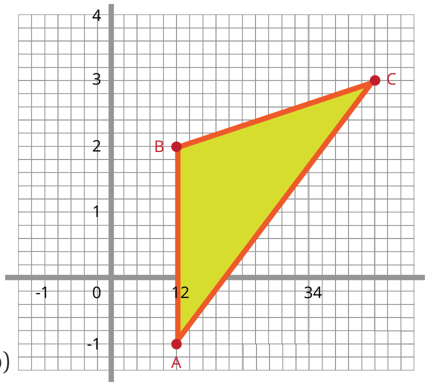
7) Obtenha a matriz A de ordem 3 definida por:

$$a_{ij} = \begin{cases} i+j, i>j \\ i^3, i=j \\ j-i, i<j \end{cases}$$

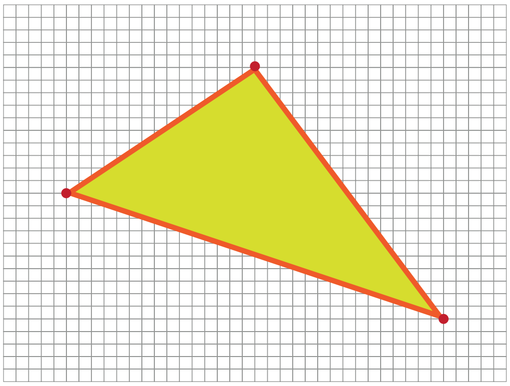
e calcule o determinante desta referida matriz.

8) Observe os triângulos esboçados nos gráficos a seguir. Através do cálculo de determinantes, estabeleça o valor correspondente à área de cada região triangular.

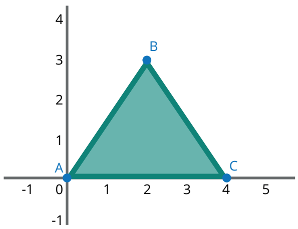
a)


b)


9) Calcule a área do terreno cuja forma está representada na figura abaixo. Estabeleça uma posição para os eixos coordenados e as respectivas coordenadas dos três vértices.



10) Calcule a área do triângulo abaixo, em cm², utilizando determinante. Também calcule esta mesma área através da fórmula adequada de Geometria Plana.



Respostas das atividades

1) a)–5 b)7 c)15 d)–52 e)28 f)–136

2) $\frac{7}{2}$

3) a)S={4} b)S={6}

5) a)$S=\{-\sqrt{\frac{11}{2}}, \sqrt{\frac{11}{2}}\}$ b)$S=\{-\frac{25}{21}\}$

6) a)0 (1ª propriedade) b)0 (2ª propriedade)
c)0 (1ª propriedade) d)0 (3ª propriedade)
e)0 (3ª propriedade)

7) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 8 & 1 \\ 4 & 5 & 27 \end{pmatrix}$ e $det\ (A) = 100$

8) a) $A= 6\ u.a.$ b) $A=\frac{9}{2}\ u.a.$

9) $A= 9\ u.a.$

10) $A= 6\ cm^2$

3

SISTEMAS LINEARES

INTRODUÇÃO

Neste capítulo faremos um estudo introdutório aos sistemas de equações lineares, iniciando com definições, exemplos e técnicas de resolução.

O fato de sabermos solucionar um sistema de equações lineares torna-se relevante em função das inúmeras aplicações práticas que estão associadas a este conteúdo de Álgebra Linear. Atualmente tais aplicações estão presentes nas mais variadas áreas, como na Astronomia, Biologia, Computação, Demografia, Física, Economia, Engenharia, Geografia, Navegação, Cartografia, Aviação, e em muitas outras.

Vamos trabalhar com exemplos de sistemas de equações lineares procurando estabelecer soluções algébricas (e também geométricas), usando o software GeoGebra para conferir nossos resultados. Veremos que a solução de um sistema linear se constitui em um conjunto de valores que satisfaz, simultaneamente, todas as equações que compõem o referido sistema linear. Também, veremos que um sistema linear pode ser classificado de acordo com a quantidade de soluções que apresenta, sendo assim podemos ter: Sistema Possível Determinado (quando admite uma única solução), Sistema Possível Indeterminado (quando admite infinitas soluções) ou Sistema Impossível (quando o sistema não admite nenhuma solução). No decorrer do texto estas classificações poderão ser observadas de forma algébrica e de forma geométrica.

Ao final deste capítulo, dedicado aos sistemas lineares, disponibilizamos uma série de atividades, com o intuito de promover a aprendizagem dos tópicos apresentados e discutidos no decorrer do texto.

3.1
EQUAÇÃO LINEAR

Toda equação da forma $a_1x_1+a_2x_2+ a_3x_3 \dots a_nx_n= b$ é denominada equação linear (ANTON, 2006). Nesta equação temos que:

- $a_1 , a_2 , \dots , a_n$ são números reais chamados coeficientes
- $x_1 , x_2, x_3, \dots , x_n$ são as incógnitas
- b é o termo independente

Exemplos:

- $3x - 2y + 7z = 8$ é uma equação linear, sendo que: 3, –2 e 7 são os coeficientes, x, y e z são as incógnitas e 8 é o termo independente.
- $2x + 4y^2 = 3$ não é uma equação linear, pois a incógnita y apresenta grau 2.
- $-3x + 4y = 0$ é uma equação linear, sendo que: –3 e 4 são os coeficientes, x e y são as incógnitas e o termo independente é nulo.
- $3z = 2x - 7y + 9$ é uma equação linear que não está na "forma padrão". Podemos escrevê-la na forma $2x - 7y - 3z = 9$ sendo que: 2, –7 e –3 são os coeficientes, x, y e z são as incógnitas e 9 é o termo independente.
- $\frac{1}{\sqrt{2}} x = 5$ é uma equação linear com apenas a incógnita x, com coeficiente $\frac{1}{\sqrt{2}}$ e com termo constante 5.

A solução de uma equação linear com n incógnitas é a sequência de números reais ou ênupla $(\alpha_1 , \alpha_2 , \alpha_3 , \dots , \alpha_n)$ que, colocados respectivamente no lugar de x_1, x_2, x_3, ..., x_n, tornam verdadeira a igualdade dada.

Quando o termo independente b for igual à zero, a equação linear denomina-se equação linear homogênea.

Pela forma como é definida, uma equação é denominada linear quando não contém produtos, radicais ou outras funções não lineares em suas incógnitas. Em outras palavras, uma equação linear é uma equação composta exclusivamente de adições e subtrações de termos que são constantes ou são o produto de uma constante pela primeira potência de uma incógnita.

3.2
SISTEMAS LINEARES

Na área de Matemática, um sistema de equações lineares (ou abreviadamente sistema linear) é um conjunto finito de equações lineares aplicadas num mesmo conjunto, igualmente finito, de incógnitas. A palavra "sistema" indica que as equações devem ser consideradas em conjunto, e não de forma individual (POOLE, 2004). Neste material vamos partir da análise da situação problema para iniciar o estudo dos sistemas de equações lineares.

Situação Problema: Na lanchonete da UFSM/Campus de Frederico Westphalen, os pastéis (de tamanho médio) têm preço único e os sucos naturais (copo de 300 ml) também. Um aluno do curso de Sistemas de Informação pagou R$16,00 por 2 pastéis e 3 copos de suco natural e seu colega pagou R$29,00 por 4 pastéis e 5 copos de suco natural. Qual o preço do pastel e do copo de suco natural?

Resolução: Para equacionar esse problema, vamos chamar de:

$x \longrightarrow$ o preço de cada pastel

$y \longrightarrow$ o preço do copo de suco natural

Assim, conforme especificado, no caso do primeiro aluno sabemos que ele comprou 2 pastéis e 3 copos de suco natural e que pagou R$16,00, portanto, se x é o preço de cada pastel e y é o preço de cada copo de suco podemos estabelecer a equação linear: $2x + 3y = 16$. No caso do segundo aluno, sabemos que ele comprou 4 pastéis e 5 copos de suco natural e que pagou R$29,00, então, considerando a especificação dos preços, podemos escrever: $4x + 5y = 29$. O preço respectivo de cada pastel (preço denominado x) e de cada copo de suco natural (preço denominado y) não se altera de uma situação para outra, e assim estas equações passam a compor um sistema de equações, e devem ser consideradas em conjunto. Então, passamos a escrever o sistema linear:

$$\begin{cases} 2x+3y=16 \\ 4x+5y=29 \end{cases}$$

Temos, assim, um sistema de duas equações lineares com duas incógnitas. Observe que o sistema linear obtido também pode ser conceituado como um sistema de equações do primeiro grau. Em outras palavras, num sistema linear, não há potência diferente de um ou zero e tampouco pode haver multiplicação entre incógnitas.

3.3 SOLUÇÃO ALGÉBRICA DE UM SISTEMA LINEAR

Nesta seção estudaremos duas formas de solução de um sistema linear, o método da substituição e o método da adição. Além destes dois métodos que remetem à cálculos algébricos, também faremos interpretações geométricas a respeito dos sistemas lineares, especificamente analisando aqueles que apresentam duas e três incógnitas.

3.3.1. Método da Substituição

Esse método consiste em isolar uma das incógnitas em uma equação, substituindo em outra equação. Assim, obtemos uma nova equação com apenas uma incógnita.

Exemplo: Vejamos como este método pode ser aplicado na resolução do sistema linear da situação problema citada anteriormente:

$$\begin{cases} 2x+3y=16 \\ 4x+5y=29 \end{cases}$$

Resolução: Isolando a incógnita x na primeira equação do sistema dado obtemos:

$$x=\frac{16-3y}{2}$$

e substituindo esta expressão na segunda equação do sistema dado obtemos:

$$4\left(\frac{16-3y}{2}\right)+5y=29.$$

Resolvendo a equação anterior para a incógnita y temos:

$$\begin{gathered} 32-6y+5y=29 \\ -y=29-32 \\ -y=-3 \\ y=3 \end{gathered}$$

Tendo obtido $y=3$, substituímos este valor na equação $x=\frac{16-3y}{2}$ e assim encontramos: $x=\frac{16-3(3)}{2}$, ou seja, obtemos $y=3{,}5$.

Portanto, podemos concluir que o pastel custa R$ 3,50 e que o copo de suco natural custa R$ 3,00. O par ordenado (3,50; 3,00) é a solução do sistema linear.

3.3.2. Método da Adição

Este método consiste em somar duas equações, membro a membro, de tal forma que se elimine uma das incógnitas. Acompanhe a resolução da situação problema anterior através do método da adição:

$$\begin{cases} 2x+3y=16 \\ 4x+5y=29 \end{cases}$$

Multiplicando no sistema anterior a primeira equação por (– 2) obtém-se:

$$-4x-6y=-32.$$

Somando esta nova equação com a segunda equação do sistema linear dado temos:

$$\begin{gathered} -4x-6y=-32 \\ 4x+5y=29 \\ -y=-3 \end{gathered}$$

e assim $y = 3$.

Agora, para determinar o valor da incógnita x temos que substituir o valor de y por 3 na primeira equação:

$$2x+3y=16 \rightarrow 2x+3(3)=16 \rightarrow 2x=16-9 \rightarrow 2x=7 \rightarrow x=\frac{7}{2} \rightarrow x=3{,}5.$$

Logo, o pastel custa R$ 3,50 e o copo de suco custa R$ 3,00. Assim, o par ordenado (3,50; 3,00) é a solução do sistema linear.

ATENÇÃO:

O conjunto de todas as soluções de um sistema é chamado de conjunto solução (S) ou conjunto verdade (V). No exemplo anterior S = {(3, 5, 3)}.

De uma maneira geral, denomina-se sistema linear de m equações nas n incógnitas $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ a todo sistema da forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

em que $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}, b_1, b_2, \ldots, b_m$ são números reais.

Se o conjunto ordenado de números reais $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ satisfaz todas as equações do sistema, é denominado **solução do sistema linear**.

Se o termo independente de todas as equações do sistema for nulo, isto é, $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$, o sistema linear será dito homogêneo.

Uma solução do sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} 2x - 5y + 3z = 0 \\ 6x - 2y + 4z = 0 \\ 4x + 3y - 2z = 0 \\ 5x - 3y + 7z = 0 \end{cases}$$

é $(0,0,0)$ Essa solução chama-se solução trivial do sistema homogêneo. Se o sistema homogêneo admitir outra solução em que as incógnitas não são todas nulas, a solução será chamada solução não trivial.

3.4
SISTEMAS LINEARES EQUIVALENTES

Dois sistemas lineares que admitem o mesmo conjunto solução são ditos equivalentes (CALLIOLI; DOMINGUES; COSTA, 2006).

Exemplo: Verifique se os sistemas $\begin{cases} x-y=1 \\ 2x+y=5 \end{cases}$ e $\begin{cases} 3x-4y=2 \\ x+2y=4 \end{cases}$ são equivalentes.

Resolução: Vamos inicialmente resolver o primeiro sistema. Isolando a incógnita x na primeira equação obtemos $x = 1+y$ e substituindo esta expressão na segunda equação:

$$2(1+y)+y=5 \rightarrow 2+2y+y=5 \rightarrow 3y=5-2 \rightarrow 3y=3 \rightarrow y=\frac{3}{3} \rightarrow y=1.$$

Substituindo este valor de y em $x = 1+y$ obtém-se $x = 2$, logo a solução do primeiro sistema é (2, 1).

Resolvendo o segundo sistema: Isolando a incógnita x na segunda equação do segundo sistema obtemos $x = 4-2y$ e substituindo esta expressão na primeira equação deste mesmo sistema conseguimos determinar o valor da incógnita y, assim:

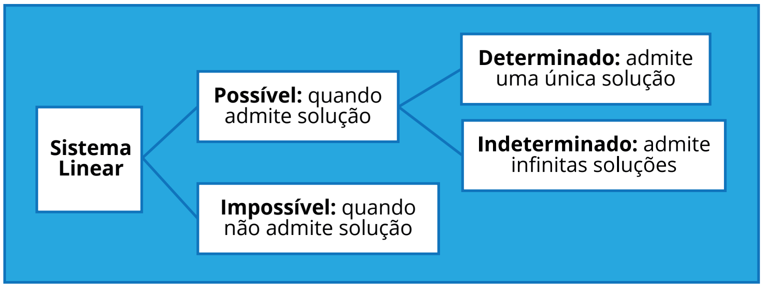
$$3(4-2y)-4y=2 \rightarrow 12-6y-4y=2 \rightarrow -10y=2-12 \rightarrow -10y=-10 \rightarrow y=\frac{-10}{-10}=1$$

Substituindo o valor obtido para y em $x = 4-2y \longrightarrow x = 4-2 \longrightarrow x = 2$ portanto a solução do sistema é (2, 1). Uma vez que os dois sistemas apresentam a mesma solução eles são ditos equivalentes.

3.5 CLASSIFICAÇÃO DE UM SISTEMA LINEAR

Os sistemas lineares são classificados quanto ao número de soluções. Observe na Figura 16 um quadro resumo relacionado à classificação de um sistema de equações lineares:

Figura 16 - Classificação de um Sistema de Equações Lineares



Fonte: Adaptado de Brasil Escola (2016).

Exemplos:

1) Um caminhão pode levar, no máximo, 60 caixas de livros do tipo L ou P, de mesmo tamanho. Elas têm, respectivamente, 35 kg e 65 kg. A carga máxima para esse caminhão é de 3 toneladas em cada viagem.

a) Descreva as equações que ilustram o problema, estando o caminhão com a capacidade máxima ocupada.

b) Estando o caminhão com a capacidade máxima ocupada, quantas caixas de cada tipo podem ser transportadas por esse caminhão?

Resolução:

a) Considerando: x como sendo o número de caixas de livros do tipo L e P como sendo o número de caixas de livros do tipo P, então, de acordo com o enunciado do problema teremos:

$$\begin{cases} x+y=60 & (I) \\ 35x+65y=3.000 & (II) \end{cases}$$

b) Vamos resolver esse sistema usando o método da substituição. Isolando a incógnita x na equação *(I)* escrevemos $x=60-y$ e substituindo esta expressão na equação *(I I)* temos:

$$35(60-y)+65y=3.000$$
$$2.100-35y+65y=3.000$$

$$y=\frac{900}{30} \rightarrow y=30$$

Substituindo $y = 30$ na equação *(II)* escrevemos

$$x+30=60 \rightarrow x=30.$$

Logo, são transportados 30 caixas do tipo L e 30 caixas do tipo P. Como esse sistema tem uma única solução, isto é S = {(30, 30)}, ele é classificado como sistema possível e determinado (SPD).

2) Resolva o sistema $\begin{cases} 3x-y=6 \\ 6x-2y=12 \end{cases}$

Resolução: Isolando y na primeira equação $(y = 3x - 6)$ e substituindo na segunda equação temos:

$$6x-2(3x-6)=12$$
$$6x-6x+12=12$$
$$0x=12-12$$
$$0x=0$$

Observe que qualquer número real colocado no lugar de x torna a sentença verdadeira. Isto significa que o sistema apresenta infinitas soluções, ou seja, ele é possível e indeterminado (SPI). Cada uma das infinitas soluções é um par ordenado cujo primeiro elemento é um número real qualquer e cujo segundo elemento é o triplo do primeiro menos seis.

3) Resolva o sistema $\begin{cases} x+y+z=4 \\ 2x+3y-5z=-11 \\ 3x-2y+38z=9 \end{cases}.$

Resolução: Numerando as equações: $\begin{cases} x+y+z=14 & (I) \\ 2x+3y-5z=-11 & (II) \\ 3x-2y+38z=9 & (III) \end{cases}$

Vamos resolver este sistema usando o método da substituição. Isolando x na equação (I) obtemos:

$$x=14-y-z$$

e substituindo nas equações (II) e (III) tem-se:

$$2(14-y-z)+3y-5z=-11 \longrightarrow 28-2y-2z+3y-5z=-11 \longrightarrow y-7z=-39 \qquad (IV)$$
$$3(14-y-z)-2y+38z=9 \longrightarrow 42-3y-3z-2y+38z=9 \longrightarrow -5y+35z=-33 \qquad (V)$$

Temos agora o um novo sistema formado pelas equações (IV) e (V):

$$\begin{cases} y-7z=-39 \\ -5y+35z=-33 \end{cases}$$

Isolando y na equação (IV)

$$Y = -39 + 7Z$$

e substituindo na equação (V) tem-se:

$$-5(-39+7z)+35z=-33$$
$$195-35z+35z=-33$$
$$0z=-228.$$

Observe que não há valor real de z que torne a sentença verdadeira. Por isso, dizemos que o sistema é impossível (SI), isto é, o conjunto solução é vazio: S = {}.

3.6
SISTEMAS LINEARES INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA

Agora que já sabemos distinguir sistemas lineares com solução única, infinitas soluções e nenhuma solução, vamos aprender a interpretar geometricamente estas possibilidades, analisando os casos de sistemas lineares que apresentam duas e três incógnitas. Para construir os esboços gráficos usaremos o software GeoGebra.

3.6.1 Sistemas Lineares com Duas Incógnitas

Qualquer equação da forma $ax + by = c$ é representada graficamente por uma reta, ou seja, se marcarmos no plano cartesiano todos os pontos que satisfazem esta equação linear, o gráfico resultante será uma reta.

No caso dos sistemas lineares compostos por duas equações lineares da forma $ax + by = c$, teremos a representação de duas retas no plano. Algo importante que devemos considerar aqui é que as soluções do sistema de equações lineares são justamente representadas pelos pontos em comum das duas retas que o constituem (INSTITUTO PROMATH, 2013). Sendo assim:

- Se o sistema **não tem solução** (sistema impossível – SI): as **retas são paralelas**, ou seja, não há pontos em comum entre as duas retas;
- Se o sistema apresenta **uma única solução** (sistema possível determinado – SPD): as r**etas são concorrentes**, portanto há somente um ponto em comum entre as duas retas;
- Se o sistema tem **infinitas soluções** (sistema possível indeterminado – SPI): as r**etas são coincidentes**, ou seja, há infinitos pontos em comum entre as retas (retas estão sobrepostas).

Figura 17 - Posições relativas de retas no plano cartesiano

Fonte: Adaptação de Instituto Promath (2013).

Resumindo: Podemos dizer que um sistema é impossível (SI) quando as retas que representam as suas equações não se interceptam, ou seja, quando são paralelas. Duas retas dizem-se paralelas quando têm o mesmo declive, e, portanto, nenhum ponto em comum. Um sistema é possível e determinado (SPD) quando as retas que representam as equações se interceptam num único ponto. Um sistema é dito possível e indeterminado (SPI) quando as retas que representam as suas equações são coincidentes. Duas retas dizem-se coincidentes quando têm a mesma expressão analítica.

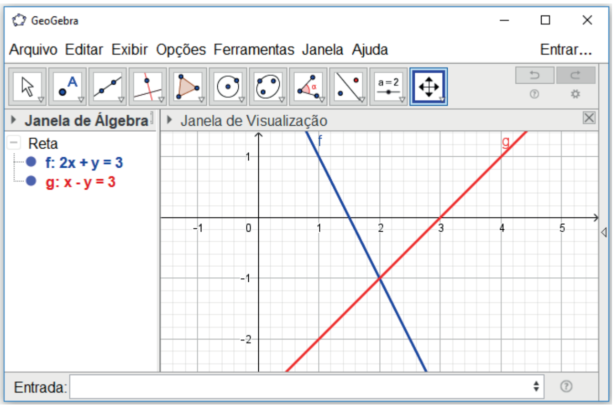
Vejamos um exemplo de interpretação geométrica para cada classificação de sistema linear (sistema impossível, sistema possível determinado e sistema possível indeterminado):

Exemplo: Usando o software GeoGebra esboce simultaneamente os gráficos das duas retas que compõem o sistema e a partir da análise do resultado gráfico estabeleça a classificação do sistema de equações lineares.

a) $\begin{cases} 2x+y=3 \\ x-y=3 \end{cases}$

Usando o software GeoGebra, podemos digitar no campo de Entrada cada uma das equações do sistema dado (após ter digitado cada equação teclar "enter"), neste caso: $2x + y = 3$ e $x - y = 3$.

Figura 18 - Um único ponto de intersecção entre as duas retas



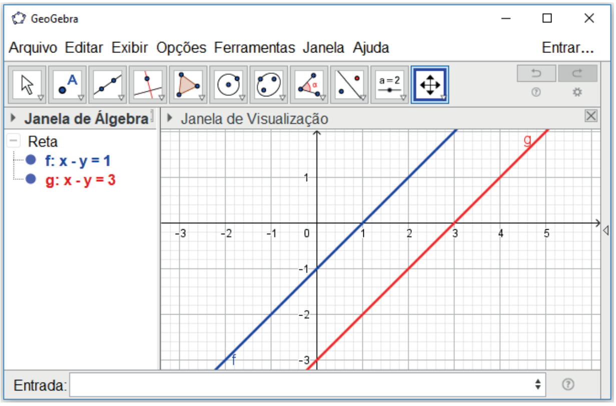
Fonte: Autores.

Analisando o gráfico obtido (Figura 18) observamos que neste caso temos um só ponto em comum entre as duas retas, trata-se do ponto, portanto, temos um sistema possível determinado (SPD) cuja solução analítica é S = {(2, −1)}.

b) $\begin{cases} x-y=1 \\ x-y=3 \end{cases}$

Pelo esboço gráfico das retas que constituem este sistema concluímos que se trata de um sistema impossível (SI), uma vez que não há pontos em comum entre as duas retas (são retas paralelas).

Figura 19 - Não há ponto de intersecção entre as duas retas

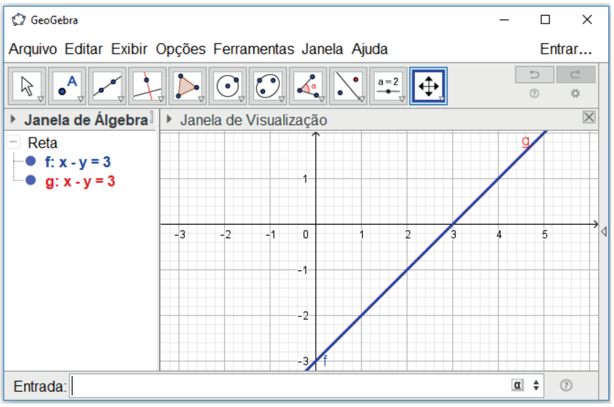


Fonte: Autores.

c) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - y = 3 \end{cases}$

Analisando as equações dadas neste sistema, percebemos que elas apresentam a mesma expressão analítica, uma vez que a primeira equação é justamente o dobro da segunda equação, observe: $2x - 2y = 6 \longrightarrow 2(x - y) = 6 \longrightarrow x - y = 3$. Portanto, as retas que representam as suas equações são coincidentes, sendo assim apresentam infinitos pontos em comum. O software GeoGebra já promove automaticamente a simplificação de uma equação. Neste caso, mesmo que tenhamos digitado no campo de "Entrada" a expressão: $2x - 2y = 6$, teremos na Janela de Álgebra a expressão simplificada: $x - y = 3$.

Figura 20 - Há infinitos pontos de intersecção entre as retas f e g



Fonte: Autores.

3.6.2 Sistemas Lineares com Três Incógnitas

Qualquer equação da forma $ax + by + cz = d$ é representada graficamente por um plano, ou seja, se marcarmos no sistema cartesiano todos os pontos que satisfazem a esta equação linear, o gráfico resultante será um plano no espaço tridimensional.

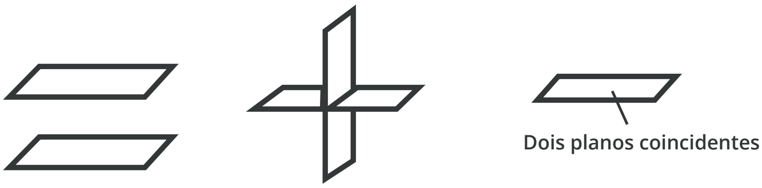
3.6.2.1 Sistemas Lineares com Duas Equações de Três Incógnitas

No caso dos sistemas lineares compostos por duas equações lineares da forma $ax + by + cz = d$, teremos a representação de dois planos no espaço. É importante considerar que as soluções do sistema de equações lineares são representadas pelos pontos em comum dos dois planos que constituem o referido sistema (INSTITUTO PROMATH, 2013). Neste caso (sistema composto por equações de dois planos) podem ser:

- Sistema sem solução: quando os dois planos que o constituem são paralelos;
- Sistema com infinitas soluções, descritas por uma reta: neste caso os dois planos que constituem o sistema são concorrentes;
- Sistema apresenta infinitas soluções, descritas por um plano: então os planos que constituem o sistema são coincidentes.

Observe na Figura 21 um esboço das possibilidades decorrentes das posições relativas entre dois planos de equações lineares da forma $ax + by + cz = d$.

Figura 21 - Posições relativas de dois planos no espaço tridimensional



Fonte: Autores.

3.6.2.2 Sistemas Lineares com Três Equações de Três Incógnitas

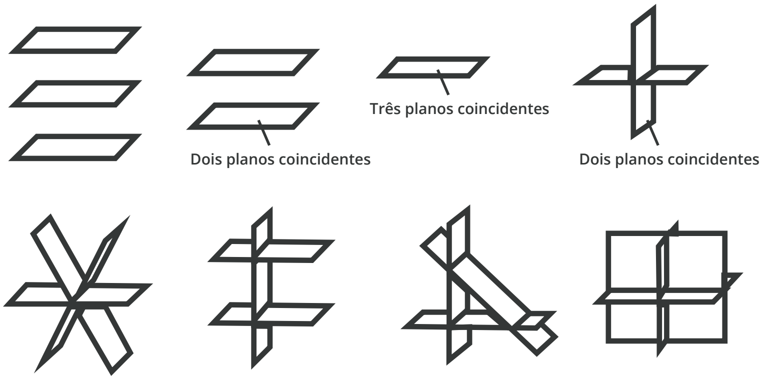
Se tivermos três equações da forma compondo um sistema linear, então teremos a interpretação geométrica da solução do referido sistema composta por três planos no espaço (INSTITUTO PROMATH, 2013). Uma vez que as soluções do sistema são representadas pelos pontos em comum dos três planos, podemos ter:

- Planos paralelos dois a dois: neste caso o sistema não terá solução;
- Planos podem ser dois coincidentes e o outro paralelo: então o sistema não terá solução;
- Três planos coincidentes: o sistema terá infinitas soluções, descritas pelo plano;
- Dois planos coincidentes e o outro concorrente: assim o sistema terá infinitas soluções, descritas por uma reta;
- Os três planos podem se intersectar em uma reta: o sistema terá infinitas soluções, descritas por uma reta;
- Dois planos paralelos e outro concorrente: o sistema não terá solução;
- Os planos podem se intersectar dois a dois determinando três retas paralelas: o sistema não terá solução;
- Os planos podem se intersectar dois a dois determinando três retas que se

intersectam em apenas um ponto: o sistema terá uma única solução.

Acompanhe na Figura 22 todas estas possibilidades com respectivas interpretações geométricas da solução de um sistema linear composto por três planos no espaço.

Figura 22 - Posições relativas de dois planos no espaço tridimensional



Fonte: Adaptação de Instituto Promath (2013).

Observe que no plano, quando obtemos infinitas soluções a partir de um sistema com duas equações lineares da forma $ax + by = c$, as infinitas soluções surgem quando as retas são coincidentes (Figura 20). Já no espaço, em sistemas elaborados a partir de equações da forma $ax + by + cz = d$, tanto com duas equações (Figura 20) ou com três equações desta forma (Figura 21), podemos ter infinitas soluções descritas ou por uma reta ou por um plano. Ou seja, no caso do espaço, infinitas soluções podem ser obtidas em dimensões distintas (reta ou plano), independentemente do número de equações que constituem o sistema de equações lineares de três incógnitas (INSTITUTO PROMATH, 2013).

Exemplo: Usando o software GeoGebra (clicar em Exibir, Janela de Visualização 3D) esboce simultaneamente os gráficos dos planos que compõem o sistema e a partir da análise do resultado gráfico estabeleça a classificação do sistema de equações lineares.

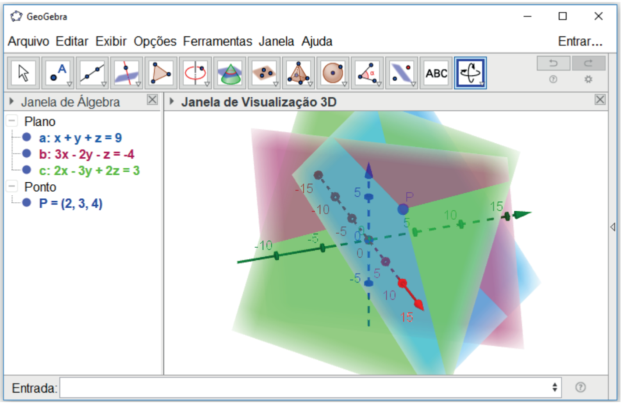
a) $\begin{cases} x+y+z=9 \\ 3x-2y-z=-4 \\ 2x-3y+2z=3 \end{cases}$

Este é um sistema de três equações lineares com três incógnitas, portanto teremos um gráfico com três planos no espaço tridimensional. Ao digitar uma a uma das três equações do sistema linear no software GeoGebra (primeiramente abrir a Janela de Visualização 3D e em seguida digitar cada uma das equações, seguidas de “enter”), visualizamos os três respectivos planos no espaço tridimensional. Observe na Figura 23 que há um único ponto de intersecção entre os três planos (ponto $P(2,3,4)$), e este ponto foi propositalmente indicado no gráfico.

Pelo fato de que há um único ponto de intersecção entre os três planos que constituem o sistema dado, classificamos este sistema como sendo um sistema possível determinado – SPD (quando há uma única solução, neste caso a solução analítica é S={(2,3,4)}).

Neste exemplo não temos a preocupação de estabelecer a solução analítica para o sistema em estudo, somente queremos chamar atenção para a interpretação gráfica do problema. Na Figura 23 estabelecemos cores diferentes para cada plano. Este efeito pode ser obtido ao clicar (botão direito do mouse) sobre cada plano já esboçado no gráfico 3D, na sequência clicar em “Propriedades” e em “Cor”, então escolher a cor desejada.

Figura 23 - Três planos no espaço tridimensional

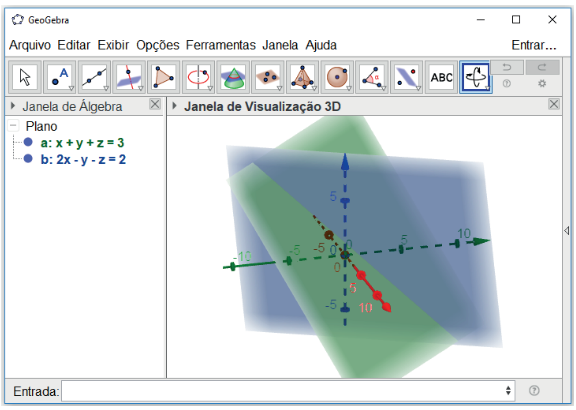


Fonte: Autores.

a) $\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x-y-z=2 \end{cases}$

Este sistema apresenta duas equações lineares de três incógnitas, portanto seu gráfico será constituído de dois planos tridimensionais. Ao construir o esboço gráfico no software GeoGebra (observe a Figura 24) percebemos que neste caso temos os dois planos se intersectando em uma reta (planos concorrentes), ou seja, este sistema apresenta infinitas soluções descritas por uma reta. Portanto, este é um sistema possível indeterminado – SPI.

Figura 24 - Dois planos no espaço tridimensional



Fonte: Autores.

3.7
MATRIZES ASSOCIADAS A UM SISTEMA LINEAR

Seja o sistema linear de m equações com n incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

em que $a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{mn}, b_1, b_2, \cdots, b_m$ são números reais.

Desse sistema, destacamos as seguintes matrizes:

Matriz completa do sistema

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Matriz incompleta do sistema

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Consideremos ainda as seguintes matrizes colunas associadas ao sistema:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Multiplicando a matriz incompleta pela matriz das incógnitas, obtemos a matriz dos termos independentes:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Dizemos que essa é a forma matricial do sistema linear. Em notação simplificada: $AX = B$.

3.8
REGRA DE CRAMER

A regra de Cramer (Gabriel Cramer, matemático e astrônomo suíço, 1704 a 1752) é empregada para resolver um sistema linear em que o número de equações é igual ao número de incógnitas. Seja o sistema de 3 equações e 3 incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

Vamos então denotar:

- D_A: determinante da matriz incompleta, ou seja:

$$D_A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

- D_x, D_y e D_z serão os determinantes que se obtêm de D_A substituindo, respectivamente, a 1ª coluna (dos coeficientes do x), a 2ª coluna (dos coeficientes do y) e a 3ª coluna (dos coeficientes do z) pela coluna dos termos independentes. Assim teremos:

$$D_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad D_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Se $D_A \neq 0$ então o sistema é possível e determinado e os valores das incógnitas são dados por:

$$x = \frac{D_x}{D_A}, \quad y = \frac{D_y}{D_A} \quad \text{e} \quad z = \frac{D_z}{D_A}$$

De um modo geral, um sistema linear de m equações com incógnitas x_1, x_2, x_3, ... , x_m cujo determinante D_A da matriz incompleta é diferente de zero, é possível e determinado.

O conjunto solução desse sistema é $S=\left\{\left(\frac{D_1}{D_A},\frac{D_2}{D_A},\cdots,\frac{D_m}{D_A}\right)\right\}$, em que D_i é o determinante que se obtém de D_A substituindo a i-ésima coluna (dos coeficientes de x_i) pela coluna de termos independentes (GIOVANNI; BONJORNO; GIOVANNI JR., 2002).

- Exemplo: Uma Universidade oferta o curso de Licenciatura em Computação. Neste referido curso há 100 acadêmicos matriculados no primeiro e segundo semestres, 62 no segundo e terceiro semestre e 84 no primeiro e terceiro semestres. Qual é o número de acadêmicos matriculados em cada um dos três semestres do curso de Licenciatura em Computação?

Para resolver esse problema vamos considerar:
x : acadêmicos matriculados no primeiro semestre;
y : acadêmicos matriculados no segundo semestre;
z : acadêmicos matriculados no terceiro semestre.

Temos assim o sistema de três equações e três incógnitas

$$\begin{cases} x+y=100 \\ y+z=62 \\ x+z=84 \end{cases}.$$

Resolvendo pela regra de Cramer, obtemos:

$$D_A=\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=2 \quad D_x=\begin{vmatrix}100 & 1 & 0\\ 62 & 1 & 1\\ 84 & 0 & 1\end{vmatrix}=122 \quad D_y=\begin{vmatrix}1 & 100 & 0\\ 0 & 62 & 1\\ 1 & 84 & 1\end{vmatrix}=78$$

$$D_z=\begin{vmatrix}1 & 1 & 100\\ 0 & 1 & 62\\ 1 & 0 & 84\end{vmatrix}=23$$

Logo:

$$x=\frac{D_x}{D_A}=\frac{122}{2}=61 \qquad y=\frac{D_y}{D_A}=\frac{78}{2}=39 \qquad z=\frac{D_z}{D_A}=\frac{46}{2}=23.$$

Portanto há 61 acadêmicos matriculados no primeiro semestre, 39 acadêmicos matriculados no segundo semestre e 29 acadêmicos matriculados no terceiro semestre do curso de Licenciatura em Computação.

Atividades – Unidade 3

1) Determine m para que (-1, 2, 2) seja solução da equação $mx + y - 2z = 8$.

2) Seja o sistema: $P = \begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ x - 2y + 2z = 6 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$

a) Verifique se (2, -1, 1) é solução de P.
a) Verifique se (0, 0, 0) é solução de P.

3) Verifique se os sistemas A e B a seguir são equivalentes:

$$A = \begin{cases} 2x - y = 5 \\ 2x + y = 7 \end{cases} \qquad B = \begin{cases} -x + 6y = 10 \\ 3x - y = 21 \end{cases}$$

4) Classifique os sistemas em possíveis, impossíveis, determinados ou indeterminados:

a) $\begin{cases} x - 4y = -3 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4a + 8b = 4 \\ 3a + 6b = 6 \end{cases}$

5) Ache dois números reais cuja soma é 11 e cuja diferença é 31.

6) Expresse matricialmente os sistemas, resolva-os, classifique a solução e utilize o software GeoGebra para validar a solução:

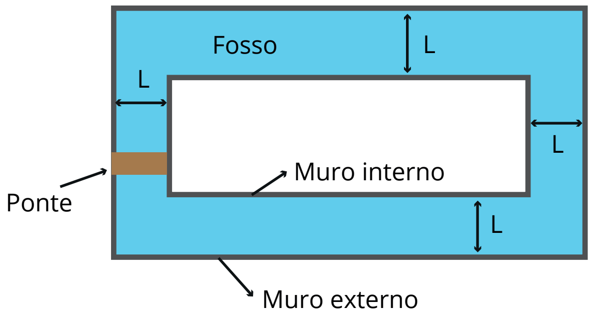
a) $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 5x + 5y = 25 \end{cases}$

b) $\begin{cases} a + 3b - c = 1 \\ a + b + c = 4 \\ -3a - 3b - 4c = -12 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x + 10y = 30 \\ -15x - 30y = -60 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2a - 3b = 10 \\ 4a - 6b = 20 \end{cases}$

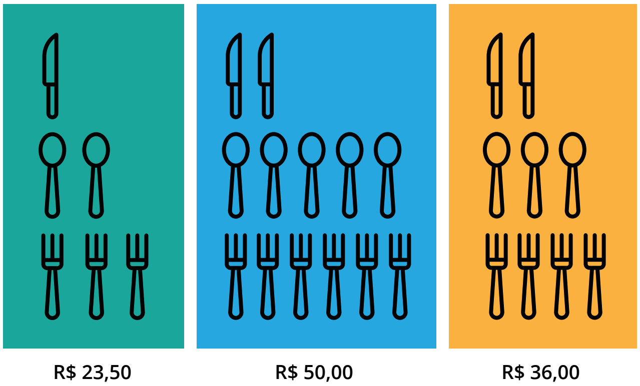
7) Em torno do prédio de uma prisão foi construído um fosso, circundado por muros, conforme a planta abaixo, e há uma ponte de largura L para atravessá-lo. Durante a ronda diurna, os guardas da prisão dão uma volta completa no muro externo, atravessam a ponte e dão uma volta completa no muro interno. Esse trajeto pode ser completado em 5.320 metros. Na ronda noturna, os guardas dão duas voltas completas no muro externo, atravessam a ponte e dão uma volta completa no muro interno, completando esse outro trajeto em 8.120 metros. Elabore um sistema linear condizente com este problema e determine a largura L (em metros) da ponte.



Dica: Como se quer descobrir o valor de L e não os perímetros correspondentes aos comprimentos dos muros (interno e externo), pode-se então agrupar tais perímetros como se fosse uma única variável. Assim, será obtido um sistema na forma:

$$\begin{cases} 4x + 9L = 5.320 \\ 6x + 17L = 8.120 \end{cases}$$

8) Através da informação ilustrativa da figura abaixo, conclua qual deve ser o valor correspondente a cada faca, colher e garfo.



9) Em um curso de capacitação há 107 alunos matriculados nas 1ª e 2ª turmas, 74 alunos nas 2ª e 3ª turmas e 91 alunos nas 1ª e 3ª turmas. Qual o total de alunos desse curso?

10) Um grupo de amigos resolveu fazer uma doação de 120 brinquedos para um orfanato. O referido grupo conseguiu arrecadar um valor de R$1.480,00 para efetuar as compras da quantidade total de brinquedos para meninos e meninas. A direção do orfanato sugeriu que fossem comprados carrinhos, bonecas e jogos didáticos, sendo que a quantidade de jogos deve ser igual à soma do número de carrinhos e bonecas. Se cada carrinho custa R$8,00, cada boneca custa R$12,00 e cada jogo didático custa R$14,00, quais são as quantidades a serem compradas de cada brinquedo?

Respostas das atividades

1) *m= –10*

2) a) sim b) não

3) Os sistemas *A* e *B* não são equivalentes pois não apresentam o mesmo conjunto solução. O sistema *A* apresenta solução S={(3, 1)} e o sistema *B* apresenta solução S={(8,3)}.

4) a) sistema possível e determinado, S={(1,1)}.
b) sistema impossível, S={}.

5) *S={(21,–10)}.*

6) a) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 25 \end{pmatrix}$. S={(4,1)}, sistema possível e determinado.

b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & -3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -12 \end{pmatrix}$. S= $\left\{\left(\frac{11}{2},-\frac{3}{2},0\right)\right\}$, sistema possível e determinado.

c) $\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ -15 & -30 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 30 \\ -60 \end{pmatrix}$. *S={}*, sistema impossível.

d) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix}$, sistema possível e indeterminado (apresenta infinitas soluções).

7) *L= 40* metros.

8) O preço da faca é R$ 5,50, o preço da colher é R$ 3,00 e o preço do garfo é R$ 4,00.

9) Serão 62 + 45 + 29 = 136 alunos matriculados.

10) Deverão ser comprados 20 carrinhos, 40 bonecas e 60 jogos didáticos.

4

VETORES

INTRODUÇÃO

Nosso objetivo neste capítulo é estudar os vetores. Veremos que os vetores, diferentemente das grandezas escalares (que ficam totalmente definidas apenas utilizando um número e uma unidade de medida associada a este número, por exemplo: tempo, temperatura, comprimento, área, volume, massa, trabalho de uma força, etc.), são caracterizados como sendo grandezas vetoriais, as quais necessitam ser determinadas a partir de uma direção, sentido e intensidade (por exemplo: a força, a velocidade, a aceleração e a posição de um corpo), sendo que à intensidade (comprimento, módulo) geralmente está associada uma unidade de medida. Vamos imaginar um carro andando a 110km/h em uma estrada entre duas cidades. As informações que temos referentes a este evento vão além do fato de que o carro apresenta uma velocidade de 110km/h, uma vez que está na direção entre uma cidade e outra e no sentido que vai de uma cidade para a outra. Então, este é um caso típico em que podemos expressar a intensidade do evento, a direção e o sentido que está ocorrendo, e o objeto matemático adequado para tal fim é o vetor. Assim, através de exemplos e situações problemas, procuraremos desenvolver uma introdução à teoria matemática relacionada aos vetores. Este é um importante tópico da Álgebra Linear que poderemos estudar fazendo uso do software GeoGebra.

4.1
DEFINIÇÕES E NOTAÇÕES

Quando nos referimos ao conceito de grandeza, queremos nos reportar a tudo o que pode ser medido. Nas ciências exatas há dois tipos de grandezas: as grandezas escalares e as grandezas vetoriais. Nosso interesse neste capítulo está focado somente no estudo das grandezas vetoriais.

4.1.1 Grandezas Vetoriais

Uma grandeza vetorial é aquela que somente fica caracterizada quando conhecemos, pelo menos, uma direção, um sentido e um número (que pode estar associado a uma unidade).

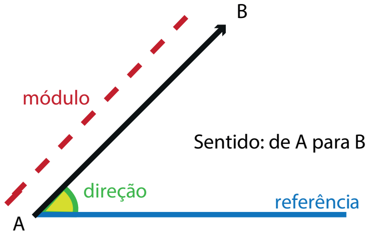
São exemplos de grandezas vetoriais: velocidade, aceleração, força, deslocamento, empuxo, campo elétrico, campo magnético, etc. (EDUCAÇÃO.FÍSICA). Por exemplo, o deslocamento de uma pessoa entre dois pontos é uma grandeza vetorial, contudo, um segmento de reta (trecho limitado de uma reta, tal como o segmento $\overline{AB}$ da Figura 25) não representa uma grandeza vetorial porque não tem sentido (ou seja, o segmento $\overline{AB}$ é igual ao segmento $\overline{BA}$).

Figura 25 - Segmento de reta $\overline{AB}$

Fonte: Adaptação de Educação.física (2017)

Entretanto, ao colocarmos um sentido em um segmento de reta, obtemos um segmento de reta orientado que então pode ser utilizado para representar a imagem geométrica de uma grandeza vetorial. Assim, vetor é um objeto matemático (ente matemático) caracterizado por possuir um sentido, uma direção e um módulo (intensidade, comprimento). Observe na Figura 26 a representação gráfica de um vetor $\overrightarrow{AB}$, com especificações de sentido (o sentido de um vetor é para onde aponta sua extremidade), direção (ângulo que forma com relação à uma dada referência) e módulo (medida que obtemos quando comparamos um vetor com outro de mesma espécie, considerado como unidade).

Figura 26 -Representação gráfica do vetor $\overline{AB}$

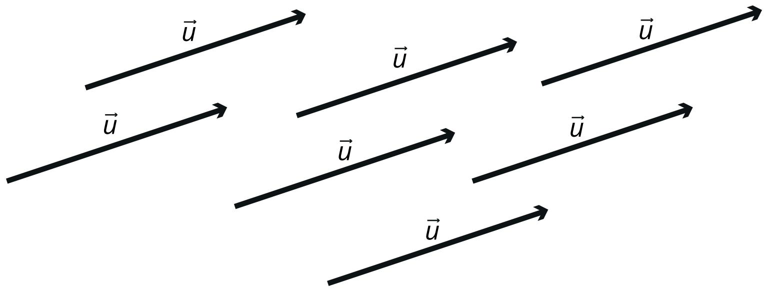


Fonte: Adaptado de Só Biologia (2017).

Os vetores têm aplicações em várias áreas do conhecimento, tanto técnico quanto científico, como Física, Engenharia e Economia, por exemplo, sendo os elementos a partir dos quais se constrói o Cálculo Vetorial (WIKIPEDIA.ORG).

Em se tratando da área de Matemática, vetor é definido como um conjunto infinito de todos os segmentos orientados que apresentam o mesmo comprimento (módulo), mesma direção e mesmo sentido (VENTURI, 2015). Assim, a ideia de vetor nos conduz à representação gráfica como a da Figura 27.

Figura 27 - Imagens geométricas do vetor $\vec{u}$



Fonte: Adaptado de Venturini (2015, p. 65).

Apesar da definição de vetor corresponder a um conjunto infinito de segmentos de mesmo comprimento, direção e sentido, na prática usamos apenas um dos segmentos orientados como representação. Cada segmento orientado da Figura 27 é, a rigor, a imagem geométrica ou o representante de um vetor. Assim, na Figura 27 temos sete segmentos orientados ou então sete imagens geométricas de um mesmo vetor. Como abuso de linguagem, empregamos a palavra vetor em vez de imagem geométrica do vetor (VENTURI, 2015).

4.1.2 Notações de Vetor

Vetores são simbolizados por letras latinas minúsculas, com uma seta acima da referida letra (sendo a seta sempre horizontal e para a direita), por exemplo:

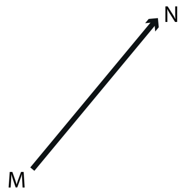
$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \ldots, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \ldots$$

Também, é usual denotar vetores através de letras latinas minúsculas e em negrito. Esta será a notação (negrito) abordada neste livro. Exemplos:

$$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \ldots, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \ldots$$

Ainda, em alguns casos, os vetores são designados por letras nas suas extremidades. Observe na Figura 27 uma imagem geométrica do vetor $\overrightarrow{MN}$ (ou **MN**), sendo M o ponto de origem do vetor.

Figura 28 - Imagem geométrica do vetor **MN**



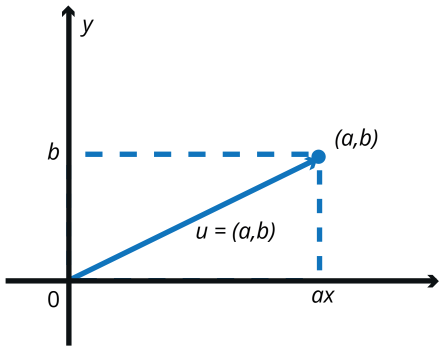
Fonte: Adaptado de Venturini (2015, p. 66).

4.1.3 Componentes de um Vetor

Conforme já constatamos neste capítulo, vetores são representações matemáticas criadas para observar a direção, o sentido e a intensidade dos movimentos de objetos no espaço. Contudo, temos que ter em mente que esse espaço não se restringe às três dimensões comumente estudadas no Ensino Médio, mas se trata de um espaço "n-dimensional", isto é, o espaço em que os vetores são observados pode ter uma dimensão (esse espaço é chamado de reta), duas dimensões (plano), três dimensões (espaço), quatro dimensões (espaço-tempo), etc. (MUNDO EDUCAÇÃO).

Sabemos que a imagem geométrica de um vetor é uma flecha (segmento orientado), e se este dado vetor parte da origem do sistema cartesiano, as coordenadas de seu ponto final servirão como forma de identificá-lo. Assim, na Figura 29, caracterizada no plano xy, o vetor **u** será identificado a partir das coordenadas **u**=(a, b), uma vez que este vetor parte da origem do plano xy e o ponto (a, b) é o ponto da extremidade final do vetor **u**, sendo que a e b são, nesta ordem, as medidas algébricas das projeções de **u** nas direções (orientadas) dos eixos x e y. Dizemos que **u** é o vetor de componentes (ou coordenadas) a e b.

Figura 29 - Coordenadas cartesianas do vetor **u** no plano *xy*.

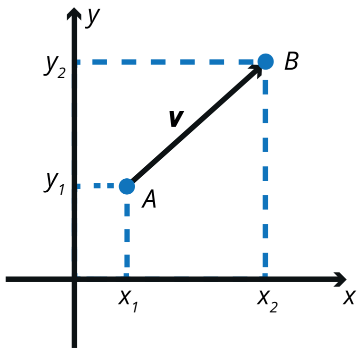


Fonte: Adaptado de Venturini (2015, p. 66).

Ampliando esta análise das projeções de um vetor nas direções (orientadas) dos eixos x e y, podemos calcular as componentes deste referido vetor a partir das coordenadas das extremidades do segmento orientado que o representa.

Assim, se $\mathbf{v}=\overrightarrow{AB}$, com $A=(x_1, y_1)$ e $B=(x_2, y_2)$, então: $\mathbf{v}= (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ ou seja, $\mathbf{v}= \overrightarrow{AB} = B - A$ onde $B - A$ é a diferença entre os pares ordenados associados aos pontos B e A. Observe o vetor na Figura 30.

Figura 30 - Vetor **V=AB** no plano *xy*.

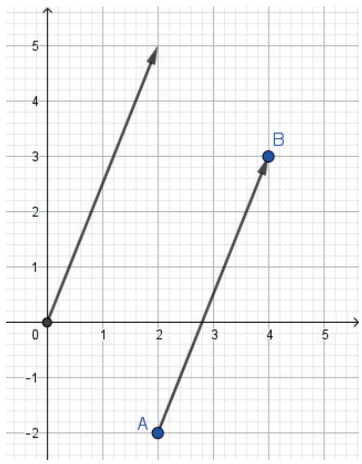


Fonte: Adaptado de Mundo Educação (2017).

Exemplo: Determine as componentes do vetor $\boldsymbol{v}= \overrightarrow{AB}$ sabendo que *A= (2, –2) e B= (4, 3)*.

Como o vetor $\boldsymbol{v}$ está definido entre os pontos *A= (2, –2)* e *B= (4, 3)* faremos
$\boldsymbol{v}= B - A$

ou seja
$\boldsymbol{v}= (4,3) - (2, -2)$
e assim,
$\boldsymbol{v}= (4 - 2, 3 + 2)$
Logo:
$\boldsymbol{v}= (2,5)$



Pelo esboço gráfico podemos constatar que a imagem geométrica do vetor $\boldsymbol{v}= \overrightarrow{AB}$ é igual à imagem geométrica do vetor solução $\boldsymbol{v}= (2,5)$ visto que dois vetores são iguais quando apresentam mesma direção, sentido e comprimento.

4.1.4 Módulo de um Vetor

O módulo do vetor geralmente é simbolizado pela mesma letra que denota o próprio vetor, mas sem negrito (ou sem seta). Assim, para o vetor **u** temos: $u=|\mathbf{u}|$, sendo que, por definição, o módulo de um vetor equivale ao seu comprimento. Este valor também é denominado valor absoluto, norma, magnitude ou intensidade, e é calculado por meio da distância de seu ponto final até a sua origem.

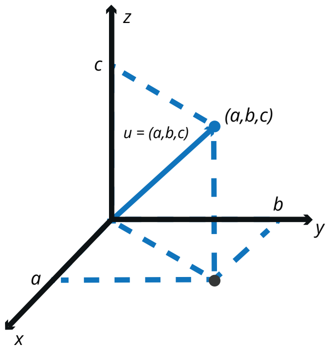
A partir das coordenadas cartesianas do vetor **u** podemos definir seu módulo (número real que representa o comprimento do vetor). Dessa forma, calcular o módulo do vetor **u** é o mesmo que calcular a distância entre o ponto (a, b) e a origem $(0, 0)$. Utilizando $|\mathbf{u}|$ como notação para o módulo do vetor **u,** pertencente ao plano ***xy*** teremos, por aplicação do teorema de Pitágoras: $|\mathbf{u}|^2 = a^2 + b^2$, assim

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

De forma análoga, se o vetor em questão estiver definido a partir da origem do espaço tridimensional (observe a Figura 31), com coordenadas cartesianas ***u*= *(a, b, c*)**, então seu módulo será calculado através da fórmula:

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Figura 31 - Coordenadas cartesianas do vetor **u** no espaço tridimensional

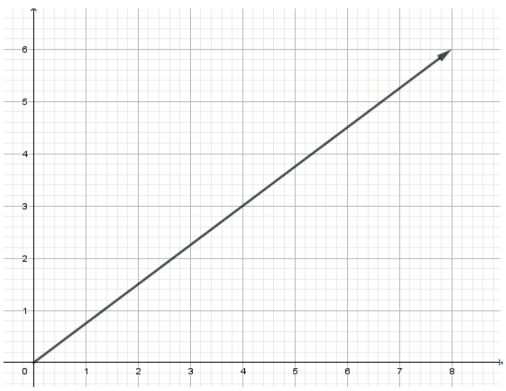


Fonte: Autores.

Consequentemente, se tivermos um vetor pertencente a um espaço n-dimensional, com coordenadas cartesianas **u** = ($a, b, c, d, \ldots, n$), a fórmula para cálculo do módulo desse vetor terá no interior da raiz quadrada uma soma de n parcelas (MUNDO EDUCAÇÃO):

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \ldots + n^2}.$$

Exemplo: Calcule o comprimento do vetor ***v***= (8, 6) cuja imagem geométrica está esboçada a seguir.

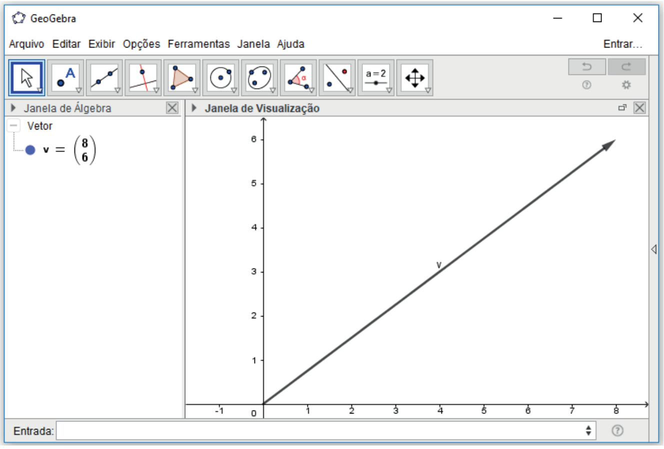


Se temos o vetor dado por ***v***= (8, 6), basta usar a fórmula $|v| = \sqrt{a^2 + b^2}$ a partir dos valores das coordenadas do vetor ***v***. Assim:

$$|v| = \sqrt{8^2 + 6^2}$$
$$|v| = \sqrt{100}$$
$$|v| = 10.$$

Este valor pode ser conferido, por exemplo, através do uso do software GeoGebra. Para isso, inicialmente devemos digitar no campo de *Entrada* do software o comando v=Vetor ((8,6)) ou então v=Vetor ((0, 0), (8,6)), sendo que neste último comando estão sendo consideradas as coordenadas iniciais e finais dos respectivos pontos das extremidades do vetor $\boldsymbol{v}$. Ao digitar "*enter*" teremos prontamente o esboço gráfico da imagem geométrica do vetor $\boldsymbol{v}$ e a especificação de suas coordenadas na Janela de Álgebra (Figura 32).

Figura 32 - Imagem geométrica do vetor $\boldsymbol{v}$ no software GeoGebra.



Fonte: Autores.

Depois de definido o vetor $\boldsymbol{v}$ podemos digitar o comando m=abs(v), seguido de "enter" (letra *m* para lembrar módulo), para assim obter o valor do módulo do referido vetor (observe que abs corresponde a uma abreviação da palavra absoluto, que compõe outra denominação de módulo que é "valor absoluto"). Ao digitar o comando m=abs(v) obtemos na Janela de Álgebra o resultado: *m= 10*, que confere com o resultado que calculamos através da expressão $|\boldsymbol{v}|=\sqrt{8^2+6^2}$.

4.1.5 Vetor Nulo

O vetor nulo, denotado por $\boldsymbol{O}$ é o vetor de direção e sentido arbitrários, cujo módulo é igual a zero. O vetor nulo definido no plano *xy* tem coordenadas (0, 0) enquanto que o vetor nulo do espaço tridimensional tem coordenadas (0, 0, 0), e a representação gráfica deste vetor é a origem do sistema de coordenadas.

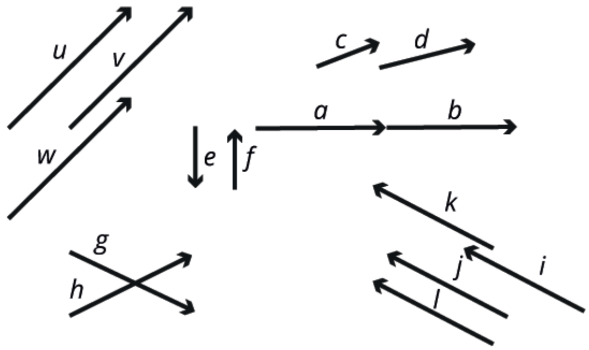
4.1.6 Igualdade de Vetores

Dizemos que dois ou mais vetores são iguais se eles apresentam o mesmo módulo (comprimento), a mesma direção e o mesmo sentido.

Nestas condições, podemos afirmar que vetores iguais estão em segmentos de reta paralelos, podendo ser coincidentes ou não. Assim, se dois ou mais vetores não apresentam igualdade entre pelo menos um de seus elementos (módulo, direção ou sentido), tais vetores são ditos diferentes.

Exemplo: Observe a Figura 33 e assinale na tabela a seguir se os referidos vetores são iguais ou são diferentes.

Figura 33 - Vetores iguais e vetores diferentes.



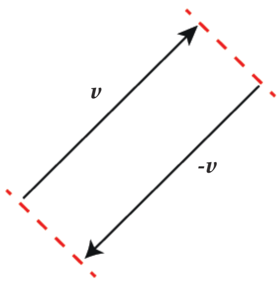
Fonte: Autores.

Pela Figura 33 temos os seguintes resultados:

VETORES	IGUAIS	DIFERENTES
a e *b*	x	
c e *d*		x
e e *f*		x
g e *h*		x
i, *j*, *k* e *l*	x	
u, *v* e *w*	x	

4.1.7 Vetores Opostos

Dado um vetor $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{AB}$, o vetor $\boldsymbol{BA}$ é o oposto de $\boldsymbol{AB}$ e se indica por $-\boldsymbol{AB}$ ou por $-\boldsymbol{v}$. Sendo assim, dois vetores são opostos quando eles possuem o mesmo módulo e a mesma direção, porém, sentidos opostos.



Podemos observar no exemplo ao lado que, ambos os vetores possuem a mesma direção e mesmo módulo, porém com sentidos opostos. Assim, tais vetores são denominados opostos.

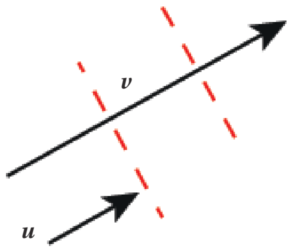
4.1.8 Vetor Unitário

Um vetor $\boldsymbol{v}$ é unitário se $|\boldsymbol{v}|= 1$. Ou seja, um vetor unitário (ou versor) é um vetor cujo comprimento é igual a 1 (uma unidade de medida).

4.1.9 Versor

Sabemos que cada vetor tem suas propriedades próprias referentes à direção, sentido e comprimento. Mas se quisermos obter um vetor que mantenha apenas as informações sobre direção e sentido, devemos calcular o versor deste vetor.

O versor de um vetor $\boldsymbol{v}$ (não nulo) é um vetor unitário (módulo 1) que tem a mesma direção e o mesmo sentido de $\boldsymbol{v}$.



Na figura ao lado o vetor $\boldsymbol{v}$ (de módulo 3) e seu versor $\boldsymbol{u}$ (de módulo 1), com mesma direção e sentido de $\boldsymbol{v}$.

Se $\boldsymbol{u}$ é o versor de $\boldsymbol{v}$ então podemos determinar suas coordenadas através da fórmula:

$$\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}$$

ATENÇÃO

Convencionou-se a representar os versores dos eixos cartesianos ortogonais através da notação: $\boldsymbol{i}=(1,0)$ e $\boldsymbol{j}=(0,1)$ no caso do plano cartesiano e $\boldsymbol{i}=(1,0,0)$, $\boldsymbol{j}=(0,1,0)$ e $\boldsymbol{k}=(0,0,1)$ no caso do espaço tridimensional. E pela definição de versor, que possui módulo unitário, temos: $|\boldsymbol{i}| = |\boldsymbol{j}| = |\boldsymbol{k}| = 1$.

4.1.10 Expressão Cartesiana de um Vetor

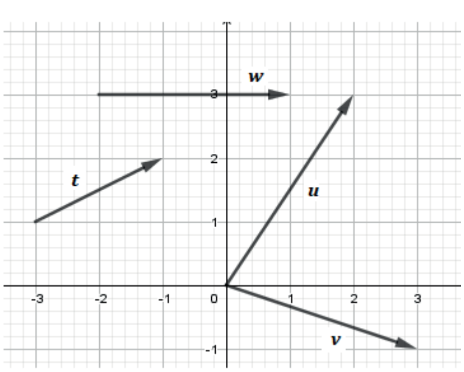
Observe que se temos um vetor no plano, definido a partir de suas coordenadas cartesianas, por exemplo: $\boldsymbol{v}=(v_x, v_y)$, então podemos denotar este mesmo vetor a partir dos versores dos eixos cartesianos ortogonais:

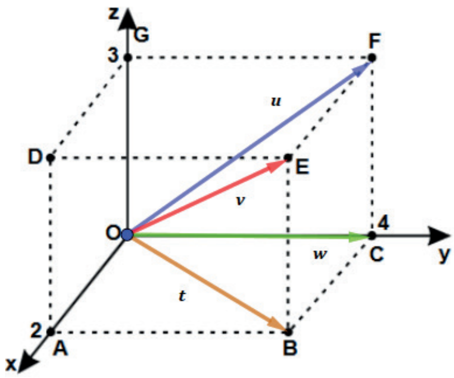
$$\boldsymbol{v}= (v_x, v_y)= (v_x, 0)+(0, v_y)= v_x(1,0)+v_y(0,1)= v_x\boldsymbol{i}+ v_y\boldsymbol{j}$$

Caso o vetor pertença ao espaço tridimensional, por exemplo $\boldsymbol{v}=(v_x, v_y, v_z)$, então:

$$\boldsymbol{v} = (v_x, v_y, v_z) = (v_x, 0, 0)+(0, v_y, 0)+(0, 0, v_z)=$$
$$v_x(1,0,0)+ v_y(0 ,1,0)+ v_z (0, 0,1) = v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k}$$

Exemplo: Obter as expressões cartesianas dos vetores das figuras abaixo:





Resolução:

$$\boldsymbol{u} = (2,3) = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$$
$$\boldsymbol{v} = (3,-1) = 3\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$$
$$\boldsymbol{w} = (1,3)-(-2,3) = (3,0) = 3\boldsymbol{i}$$
$$\boldsymbol{t} = (-1,2) - (-3,1) = (2,1) = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$$

Já na segunda figura deste exemplo, temos vetores definidos no espaço tridimensional, sendo assim:

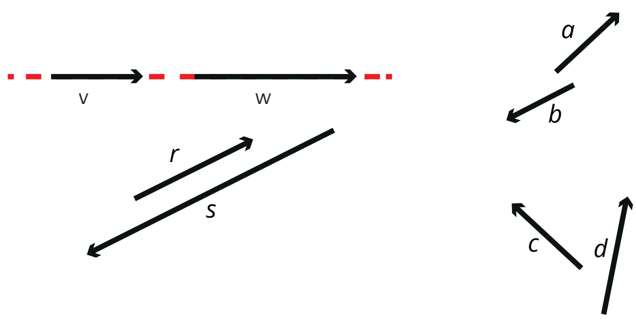
$$\mathbf{u} = \mathbf{OF} = (0,4,3) = 4\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{v} = \mathbf{OE} = (2,4,3) = 2\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{w} = \mathbf{OC} = (0,4,0) = 4\boldsymbol{j}$$
$$\boldsymbol{t} = \mathbf{OB} = (2,4,0) = 2\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}$$

4.1.11 Vetores Colineares

Dois vetores $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ são ditos colineares se tiverem a mesma direção. Em outras palavras, se forem pertencentes a uma mesma reta ou a retas paralelas.

Na Figura 34, imagens geométricas de vetores colineares ($\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$, assim como $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{s}$) e de vetores não-colineares ($\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$, assim como $\boldsymbol{c}$ e $\boldsymbol{d}$).

Figura 34 - Vetores colineares ($\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$; $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{s}$) e vetores não-colineares ($\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$; $\boldsymbol{c}$ e $\boldsymbol{d}$)



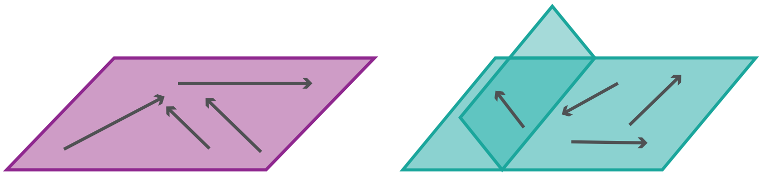
Fonte: Autores.

4.1.12 Vetores Coplanares

Três vetores (ou mais) $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ e $\boldsymbol{r}$ são ditos coplanares se tiverem imagens geométricas paralelas a um mesmo plano. Observe que dois vetores são sempre coplanares, enquanto que três vetores podem ou não ser coplanares.

Na Figura 35, à esquerda temos quatro vetores que são coplanares (imagens geométricas no mesmo plano) e à direita temos um exemplo de quatro vetores que não são coplanares (pois um dos vetores não apresenta sua imagem geométrica no mesmo plano onde estão as imagens geométricas dos outros três vetores).

Figura 35 - Quatro vetores coplanares (plano à esquerda) e quatro vetores não-coplanares (planos à direita)



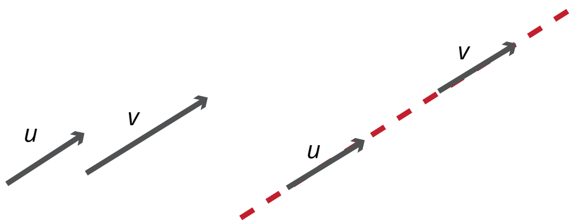
Fonte: Adaptado de Venturini (2015, p. 70).

4.1.13 Paralelismo de Vetores

Dois vetores $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ que apresentam a mesma direção (não precisam ter o mesmo sentido, nem o mesmo comprimento) são ditos paralelos se suas imagens geométricas podem ser representadas sobre uma mesma reta. Se $\boldsymbol{u}$ é paralelo a $\boldsymbol{v}$ indicamos: $\boldsymbol{u}//\boldsymbol{v}$.

Acompanhe na Figura 36 um exemplo de vetores que são paralelos, uma vez que podem ser representados colinearmente (passaremos a adotar a ideia de translação).

Figura 36 - os vetores $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ são paralelos



Fonte: Autores.

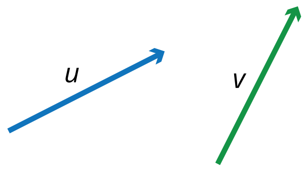
Ainda, por definição, dois vetores paralelos são ditos equiversos se apresentam o mesmo sentido, e em caso contrário (sentidos opostos) são ditos contraversos. Estas denominações são referentes somente a vetores paralelos. Os vetores $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ da Figura 36 são ditos vetores equiversos.

4.2
OPERAÇÕES COM VETORES

Tal como já sabemos, vetor é um ente matemático que representa um conjunto de segmentos orientados de reta, tendo como função fornecer informações relacionadas a módulo, direção e sentido. Veremos a seguir que os vetores podem ser somados, subtraídos e multiplicados por um número (que comumente chamamos de escalar), sendo que estas operações efetuadas com vetores se assemelham muito à forma como operamos com os números reais.

Para definir as operações de adição, subtração e multiplicação por escalar vamos iniciar considerando dois vetores não nulos quaisquer, ***u*** e ***v*** (Figura 37).

Figura 37 - vetores ***u*** e ***v***



Fonte: Autores.

4.2.1 Soma de Vetores

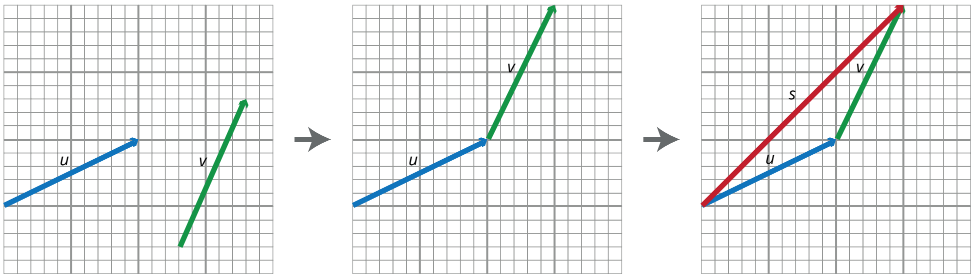
Para efetivamente calcularmos a somas de dois ou mais vetores vamos estudar três formas diferenciadas (mas que apresentam o mesmo propósito), o Método Gráfico, a Regra do Paralelogramo e a Decomposição dos Vetores em Coordenadas. Além da explanação dos métodos para cálculo da soma de vetores também teremos o estudo das propriedades válidas para a soma de vetores.

4.2.1.1 Vetor Soma – Método Gráfico

Para definir o resultado da soma dos vetores ***u*** e ***v*** (Figura 37), a partir da extremidade ***u*** desenhamos um vetor igual a ***u*** (ou então efetuamos uma translação da imagem geométrica de ***v*** até a extremidade de ***u***). Em seguida devemos ligar a origem do primeiro vetor com a extremidade do segundo vetor, e assim obtemos o vetor ***S***, que é denominado vetor soma ou vetor resultante de ***u*** e ***v***, ou seja: ***S***= ***u***+***v***.

Acompanhe na Figura 38 o passo a passo de determinação da imagem geométrica do vetor ***S*** que corresponde à soma dos vetores ***u*** e ***v***.

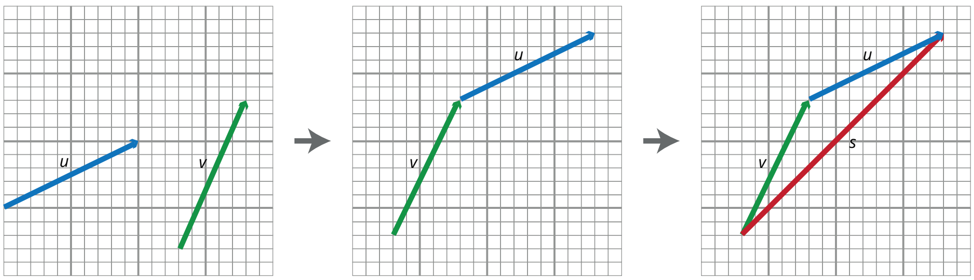
Figura 38 - soma dos vetores $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$.



Fonte: Autores.

Podemos também estabelecer a soma dos vetores $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ procedendo tal como indicado na Figura 39, isto é, a partir da extremidade do vetor $\boldsymbol{v}$ passamos a desenhar um vetor igual a $\boldsymbol{u}$. O resultado que obteremos é o mesmo do anterior. Assim, concluímos que $\boldsymbol{S}= \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}= \boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$.

Figura 39 - soma dos vetores $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$.



Fonte: Autores.

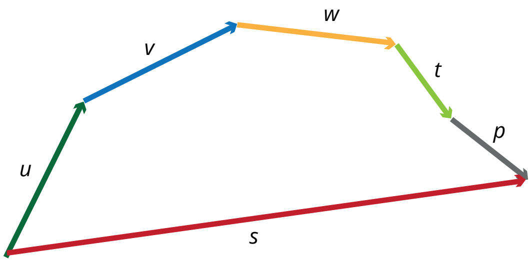
INTERATIVIDADE

É importante observar que, nesse caso (de soma de vetores), o comprimento do vetor $\boldsymbol{S}$ será menor ou igual à soma dos comprimentos dos vetores $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$, ou seja, que $|\boldsymbol{S}| \leq |\boldsymbol{u}|+|\boldsymbol{v}|$. Pense a respeito (pesquise por: Desigualdade Triangular para Vetores)!

Caso haja mais do que dois vetores a serem somados, então, cada novo vetor a ser somado é colocado de maneira que o final de um coincida com o início do próximo. O vetor resultante será obtido unindo-se o início do primeiro com o final do último vetor adicionado.

Exemplo: Note na Figura 40 que o vetor $\boldsymbol{S}$ é a resultante da soma de cinco vetores, ou seja, $\boldsymbol{S}= \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}+\boldsymbol{t}+\boldsymbol{p}$, sendo que une o início do vetor $\boldsymbol{u}$ ao final do vetor $\boldsymbol{p}$.

Figura 40 - Vetor ***S*** é resultante da soma de cinco vetores.



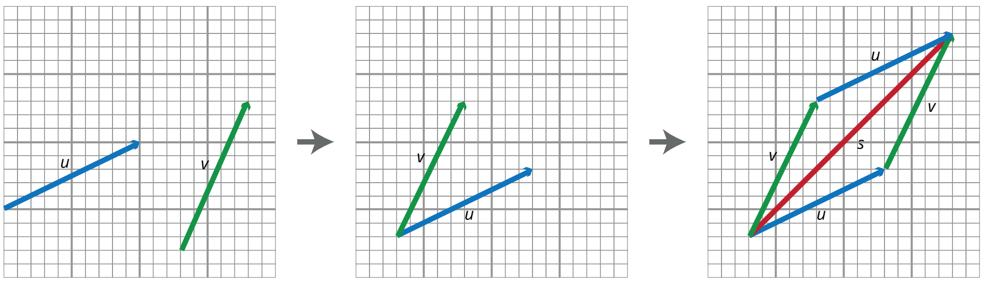
Fonte: Autores.

4.2.1.2 Vetor Soma – Regra do Paralelogramo

Sejam ***u*** e ***v*** dois vetores não nulos quaisquer. Como já sabemos (pelo método gráfico), a soma desses vetores é um terceiro vetor, o vetor resultante: ***S***= ***u***+***v***. Para determinarmos este vetor resultante, podemos alternativamente utilizar a regra do paralelogramo.

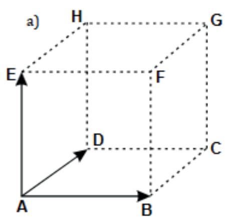
Temos que desenhar o paralelogramo definido a partir dos vetores ***u*** e ***v***. Então, inicialmente unimos em um mesmo ponto as origens dos dois vetores. Em seguida traçamos um vetor paralelo ao vetor ***u*** a partir da extremidade do vetor ***v*** de mesmo módulo e sentido, depois, traçamos um outro vetor paralelo ao vetor ***v***, começando na extremidade do vetor ***u*** (com mesmo módulo e sentido de ***v***). Estando o paralelogramo já definido, o vetor resultante ***S***= ***u***+***v*** consistirá na diagonal do paralelogramo obtido. Observe o passo a passo de obtenção do vetor ***S***, via regra do paralelogramo, na Figura 41.

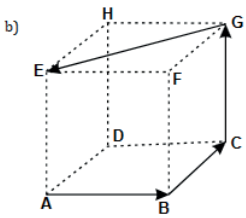
Figura 41 - Soma dos vetores ***u*** e ***v*** pela regra do paralelogramo.



Fonte: Autores.

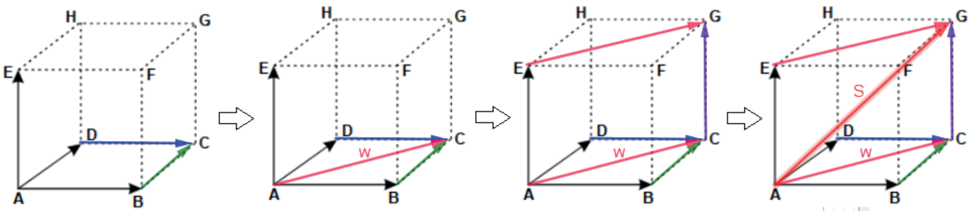
Exemplo: (VENTURI, 2015, p. 75) Nos cubos dados a seguir, represente o vetor resultante da soma dos vetores indicados.



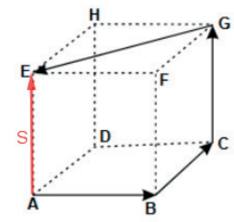


Resolução:

a) Vamos utilizar a regra do paralelogramo, traçando os vetores paralelos aos vetores ***AD*** e ***AB*** dados na figura, com mesmo módulo e sentido (na cor verde um vetor paralelo ao vetor ***AD*** e na cor azul um vetor paralelo ao vetor ***AB***). Depois, traçamos o primeiro vetor resultante de uma soma (indicado na figura por ***w***), localizado na diagonal do paralelogramo ***ABCD***. Na sequência, traçamos um vetor paralelo ao vetor ***AE*** (usamos a cor lilás), e também traçamos um vetor paralelo ao vetor ***w***. Então, para finalizar, usamos novamente a regra do paralelogramo traçando a diagonal do paralelogramo ***ACGE***, sendo que o vetor ***AG*** (indicado na figura por ***S***) é a solução do problema.



A resolução do segundo problema é obtida ligando a origem do vetor ***AB*** à extremidade do vetor, pois uma vez que os quatro vetores dados na figura estão posicionados em sequência (o final de um coincide com o início do próximo), pelo método gráfico, o vetor resultante é obtido unindo-se o início do primeiro com o final do último vetor. No esboço a seguir a solução do problema está indicada pelo vetor ***S***.

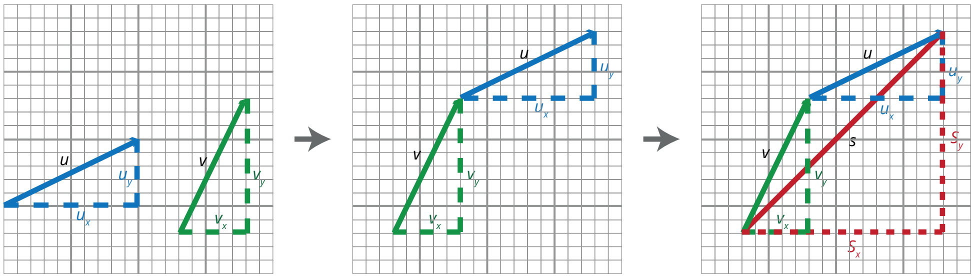


4.2.1.3 Vetor Soma – Decomposição dos Vetores em Coordenadas

Considerando os dois vetores não nulos ***u*** e ***v***, como já especificado na Figura 37, vejamos como poderemos proceder com a soma destes vetores a partir da decomposição de suas componentes horizontais e verticais.

Conforme já discutimos, um vetor definido no plano *xy* pode ser especificado a partir de suas coordenadas cartesianas. Assim, seja $\boldsymbol{v}= (v_x,v_y)$ e $\boldsymbol{u}=(u_x,u_y)$. Observe na Figura 42 que ao posicionarmos o vetor ***u*** na extremidade do vetoru ***v***, pelo método gráfico obtemos o vetor ***S*** resultante da soma dos vetores ***u*** e ***v***, ou seja, ***S=v+u*** (lembrando que ***S= v+u= u+v***).

Figura 42 - Soma dos vetores ***u*** e ***v*** por decomposição de coordenadas.



Fonte: Adaptadção de Wikipedia (2017).

Contudo, pela Figura 42, percebemos que as coordenadas cartesianas do vetor ***S*** podem ser definidas como: $s_x = v_x + v_y$ e $s_y = u_x + u_y$. Então, se

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$$

temos, em termos das coordenadas,

$$s_x = (v_x, v_y) + (u_x, u_y),$$

ou seja,

$$s_y = (v_x + u_x,\ v_y + u_y).$$

Expandindo para a forma tridimensional, considerando $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y, v_z)$ e $\boldsymbol{u} = (u_x, u_y, u_z)$, se:

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$$

então,

$$\boldsymbol{S} = (v_x, v_y, v_z) + (u_x, u_y, u_z)$$

ou seja,

$$\boldsymbol{S} = (v_x + u_x,\ v_y + u_y,\ v_z + u_z)$$

Exemplo: Dados os vetores $\boldsymbol{v} = (4,1)$ e $\boldsymbol{u} = (2,3)$ e calcule o vetor resultante $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$.

Sendo que devemos calcular

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$$

temos, em termos das coordenadas,

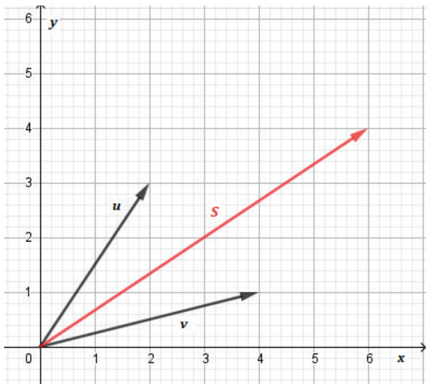
$$\boldsymbol{S} = (4,1)+(2,3),$$

ou seja,

$$\boldsymbol{S} = (4+2,\ 1+3)$$

e assim

$$\boldsymbol{S} = (6,4)$$

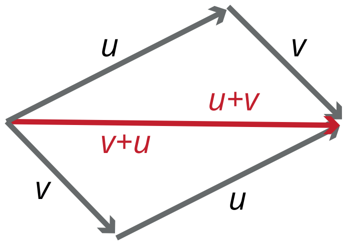


4.2.1.4 Propriedades da Soma de Vetores

Propriedade Comutativa: Dados os vetores ***u*** e ***v***, a soma vetorial é comutativa, isto é: $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$.

Observe na Figura 43 a validade da propriedade comutativa na soma de vetores (somas efetuadas pela aplicação do método gráfico).

Figura 43 - Ilustração da propriedade comutativa na soma de vetores

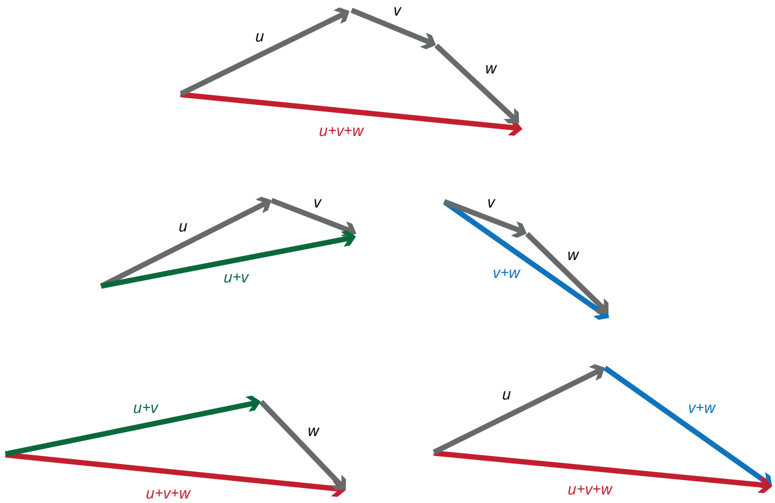


Fonte: Adaptação de Venturini (2015, p. 74).

Propriedade Associativa: Dados os vetores ***u*** e ***v***, tem-se que soma vetorial é associativa, isto é: ***u+v+w= (u+v)+w= u+(v+w)***.

Na Figura 44 um demonstrativo da validade da propriedade associativa na soma de vetores (somas efetuadas pela aplicação do método gráfico).

Figura 44 - Ilustração da propriedade associativa na soma de vetores



Fonte: Autores.

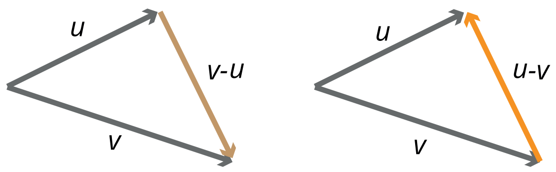
Existência de Elemento Neutro: Existe o vetor ***O*** (vetor nulo) tal que para todo vetor ***u*** tem-se ***O+u= u***.
Existência de Elemento Simétrico: Para cada vetor ***u*** existe um vetor ***–u*** tal que ***u+(–u)= O***.

4.2.2 Subtração de Vetores

Por definição, dados dois vetores ***u*** e ***v***, definimos a diferença ***u–v*** por: ***u–v= u+(–v)***.

Graficamente, a diferença de dois vetores ***u*** e ***v*** é obtida fazendo-se com que ***u*** e ***v*** tenham a mesma origem. Observe na Figura 45, onde estão esboçadas as imagens geométricas dos vetores ***u*** e ***v*** que a diferença de vetores não atende à propriedade comutativa, ou seja, ***u–v*** ≠ ***v–u*** (os dois vetores apresentam sentidos contrários).

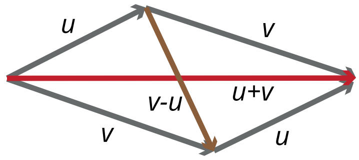
Figura 45 - Imagem geométrica da diferença de vetores



Fonte: Adaptado de Venturini (2015, p. 73).

Se observarmos um paralelogramo construído a partir de dois vetores ***u*** e ***v***, teremos em suas diagonais as imagens geométricas do vetor soma ***u+v*** e do vetor diferença ***v–u***. Confira este fato na Figura 46.

Figura 46 - Diagonais de um paralelogramo.



Fonte: Adaptaçdo de Venturini (2015, p. 74)

4.2.3 Multiplicação por Escalar

Dado um número real k e um vetor não nulo $\boldsymbol{v}$, o produto do número real k pelo vetor $\boldsymbol{v}$ corresponde ao vetor $\boldsymbol{w}= k\boldsymbol{v}$, que atende às seguintes características:

1º) $|\boldsymbol{w}|=|k|\,|\boldsymbol{v}|$
2º) A direção de $\boldsymbol{w}$ será a mesma direção de $\boldsymbol{v}$.
3º) O sentido do vetor $\boldsymbol{w}$ (em comparação com o sentido do vetor $\boldsymbol{v}$) depende do valor do número real k:

- ✓ Se $k>0$ os vetores $\boldsymbol{w}$ e $\boldsymbol{v}$ possuem o mesmo sentido;
- ✓ Se $k>0$ os vetores $\boldsymbol{w}$ e $\boldsymbol{v}$ possuem sentidos opostos;
- ✓ Se $k=0$ ou se $\boldsymbol{v}=0$ (vetor nulo) o produto $\boldsymbol{w}=k\boldsymbol{v}$ resulta no vetor nulo.

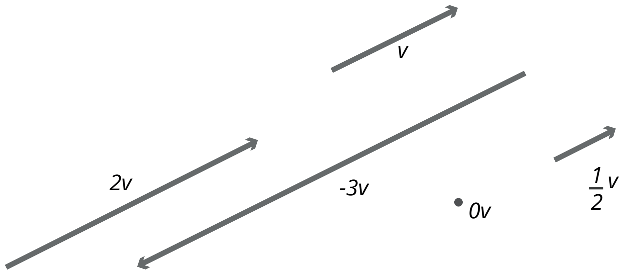
Observe que se $k\neq 0$ então o produto $\frac{1}{k}\boldsymbol{v}$ pode ser indicado por $\frac{\boldsymbol{v}}{k}$.

Temos que vetores podem ser multiplicados por qualquer número real k, e as componentes do vetor $\boldsymbol{w}=k\boldsymbol{v}$ passam a ser determinadas de acordo com a dimensão do vetor $\boldsymbol{v}$:

- ✓ No plano xy, se $\boldsymbol{v}= (v_x,v_y)$ e $\boldsymbol{w}=k\boldsymbol{v}$ então $\boldsymbol{w}= k(v_x,v_y)= (kv_x,kv_y)$
- ✓ No plano xyz, se $\boldsymbol{v}= (v_x,v_y,v_z)$ e $\boldsymbol{w}=k\boldsymbol{v}$ então $\boldsymbol{w}= k(v_x,v_y,v_z)= (kv_x,kv_y,kv_z)$

Exemplo: Na Figura 47 temos a imagem geométrica do vetor $\boldsymbol{v}$ e exemplos de multiplicação por escalar (valor positivo, negativo, nulo e fracionário).

Figura 47 - Multiplicação por escalar



Fonte: Adaptado de Wikipedia (2017)

ATENÇÃO
Sugerimos que sejam realizadas as atividades numeradas de 1 a 11 deste capítulo.

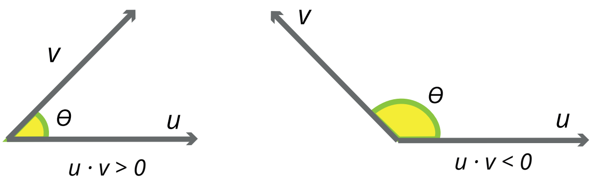
4.2.4 Produto Interno ou Produto Escalar

O produto escalar (ou produto interno) é a multiplicação entre dois vetores que tem como resultado uma grandeza escalar (um número). Há duas maneiras de obtermos esse produto: quando conhecemos o ângulo entre os dois vetores, bem como seus módulos, e quando conhecemos as componentes desses vetores. No primeiro caso (definição geométrica), escrevemos o produto escalar entre os vetores $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ como:

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}| \cos(\theta)$$

onde $|\boldsymbol{u}|$ e $|\boldsymbol{v}|$ são os módulos dos vetores $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$, respectivamente, e θ é a medida do ângulo formado entre esses dois vetores (sendo $0^o \leq \theta \leq 180^o$), tal como indicado na Figura 48.

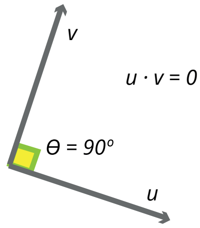
Figura 48 - Produto escalar e ângulo entre dois vetores.



Fonte: Adaptação de Venturini (2015, p. 90).

Uma vez que a definição geométrica do produto escalar envolve o cosseno do ângulo compreendido entre os vetores, caso tenhamos $\theta = 90^o$ então o produto escalar será nulo ($\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 0$ pois $\cos(90^o) = 0$), e neste caso os vetores são ditos ortogonais (notação $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$).

Figura 49 - Vetores ortogonais, produto escalar nulo.



Fonte: Autores.

A segunda forma (definição algébrica) de definir o produto escalar (ou produto interno) entre dois vetores $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ é a partir das componentes de ambos os vetores. Se os vetores $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ estiverem definidos no plano xy, ou seja, se podemos escrever $\boldsymbol{u} = (u_x,u_y)$ e $\boldsymbol{v} = (v_x,v_y)$ então pela Lei dos Cossenos obtemos:

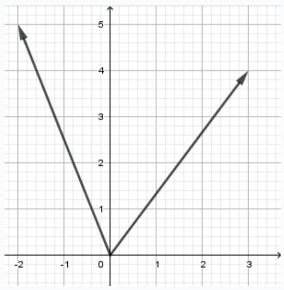
$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = (u_x,u_y) \cdot (v_x,v_y)$$
$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = u_x\, v_x + u_y\, v_y$$

Caso os vetores $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ estejam definidos no espaço tridimensional, com $\boldsymbol{u} = (u_x,u_y,u_z)$ e $\boldsymbol{v} = (v_x,v_y,v_z)$ usando a Lei dos Cossenos escrevemos:

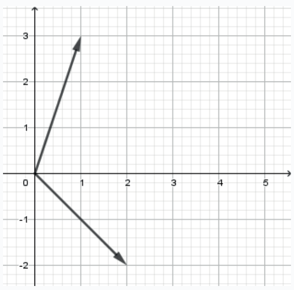
$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = (u_x,u_y,u_z) \cdot (v_x,v_y,v_z)$$
$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = u_x\, v_x + u_y\, v_y + u_z v_z$$

Exemplo: O produto escalar entre $\boldsymbol{u} = (3,4)$ e $\boldsymbol{v} = (-2,5)$ é $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = (3)(-2)+(4)(5)=-6+20=14$

Observe na figura ao lado que neste exemplo o ângulo existente entre os dois vetores apresenta uma medida menor que 90º, sendo assim o valor correspondente ao produto escalar entre $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ será um número real positivo.



Exemplo: O produto escalar entre $\boldsymbol{u} = (1,3)$ e $\boldsymbol{v} = (2,-2)$ é $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = (1)(2)+(3)(-2)= 2-6=-4$



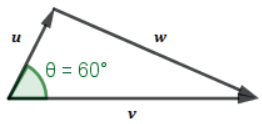
Observe na figura ao lado que neste exemplo o ângulo existente entre os dois vetores apresenta uma medida maior que 90º, sendo assim o valor correspondente ao produto escalar entre $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ será um número real negativo.

4.2.4.1 Propriedades do Produto Escalar

Quaisquer que sejam os vetores $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ e sendo m escalar temos:

1º) Propriedade comutativa: $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}$
2ª) Propriedade distributiva em relação à soma de vetores: $\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w}$
3ª) Multiplicação por escalar: $(m\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} \cdot (m\boldsymbol{v}) = m(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})$
4ª) Desigualdade de Cauchy-Schwarz: $|\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}| \leq |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|$
5ª) $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} = |\boldsymbol{u}|^2$

Exemplo: O triângulo da figura abaixo é determinado pelos vetores $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$. Sabendo que $|\boldsymbol{u}|=4$ e que $|\boldsymbol{v}|=15$, utilize as propriedades do produto escalar para determinar $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w}$.



Para solucionar este problema temos que primeiramente observar que $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w}$ (ou $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{v}$) e que são conhecidos os valores dos módulos de $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$, assim como o ângulo entre estes dois vetores. Com estas informações podemos partir da definição geométrica do produto escalar entre os vetores $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$:

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = |\boldsymbol{v}||\boldsymbol{u}| \cos(\theta)$$

e assim temos,

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = (4)(15)\cos(60^\circ)$$

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = (4)(15)\left(\frac{1}{2}\right)$$

ou seja,

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 30.$$

Mas como neste caso temos $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{v}$ multiplicando escalarmente $\boldsymbol{u}$ de ambos os lados desta igualdade obtemos:

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}$$

então, pelas propriedades do produto escalar, como $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} = |\boldsymbol{u}|^2$ e $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$ escrevemos: $|\boldsymbol{u}|^2 + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$, ou seja,

$$|4|^2 + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w} = 30$$

e assim

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w} = 30 - 16 = 14.$$

4.2.4.2 Ângulo entre Vetores

A partir da definição geométrica do produto interno entre vetores passamos a definir a expressão para cálculo da medida do ângulo entre dois vetores (WIKIPEDIA). Assim, dados os vetores $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$, se $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}| \cos(\theta)$, então,

$$\cos(\theta) = \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}$$

ou seja,

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}\right)$$

Exemplo: Conhecidos os vetores $\boldsymbol{u} = (2, 2)$ e $\boldsymbol{v} = (0, 2)$, calcule o ângulo entre eles.

Para determinar o ângulo entre os vetores $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ vamos usar

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}\right)$$

e para tanto precisamos calcular o produto escalar $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$ e os módulos $|\boldsymbol{u}|$ e $|\boldsymbol{v}|$. Temos:

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = (2, 2) \cdot (0, 2) = (2)(0) + (2)(2) = 4$$
$$|\boldsymbol{u}| = \sqrt{(2)^2 + (2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

e

$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{(0)^2 + (2)^2} = \sqrt{4} = 2.$$

Assim:

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{4}{(2\sqrt{2})(2)}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 45°$$

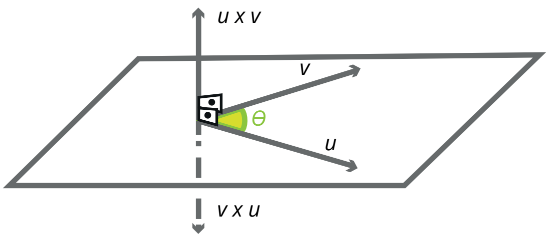
4.2.5 Produto Vetorial ou Produto Externo

O produto vetorial de dois vetores $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ no espaço tridimensional, não paralelos entre si, é um terceiro vetor, denotado por $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$, que apresenta as seguintes características:

a) Módulo: $|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}| \operatorname{sen}(\theta)$, onde θ é o ângulo entre os vetores $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$.
b) Direção: o vetor $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ é perpendicular simultaneamente aos vetores $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$.
c) Os vetores $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u}$ possuem sentidos opostos, ou seja, $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = -(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u})$

Acompanhe na Figura 50 a imagem geométrica de cada um dos vetores $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u}$.

Figura 50 - Interpretação geométrica do vetor $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$



Fonte: Adaptaçdo de Venturini (2015, p. 105).

Ao contrário do produto escalar, que resulta num número real, e pode ser definido em vetores do espaço e em vetores do plano, o produto vetorial só pode ser definido em vetores do espaço.

4.2.5.1 Propriedades do Produto Vetorial

1º) $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{O}$ se, e somente se, um deles é o vetor nulo ou se os vetores $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ têm a mesma direção. Consequentemente $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{u} = \boldsymbol{O}$.
2ª) Propriedade anti-comutativa: $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = -(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u})$ (não vale a propriedade comutativa pois: $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u}$).
3ª) $(m\boldsymbol{u})\times(n\boldsymbol{v}) = (mn)(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})$, sendo m e n escalares.
4ª) Propriedade distributiva: $(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})\times \boldsymbol{w} = (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{w})+(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})$, que configura a propriedade distributiva à direita, e também $\boldsymbol{w} \times (\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{u})+(\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{v})$, que compõe a propriedade distributiva à esquerda.
5ª) Duplo produto vetorial: $(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{w} = (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w})\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w})\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w})\,\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})\boldsymbol{w}$.

4.2.5.2 Expressão Cartesiana do Produto Vetorial

Sejam $\boldsymbol{u}=(u_x,u_y,u_z)$ e $\boldsymbol{v}=(v_x,v_y,v_z)$ dois vetores do espaço tridimensional, denominamos produto vetorial de $\boldsymbol{u}$ por $\boldsymbol{v}$, e indicamos por $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ (leia-se "u vetorial v"), o vetor obtido ao desenvolvermos o determinante simbólico indicado a seguir:

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

sendo que é importante notar que ao formar o determinante indicamos: na primeira linha os vetores $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ e $\boldsymbol{k}$ (versores dos eixos coordenados), na segunda linha as componentes do vetor $\boldsymbol{u}$ e na terceira linha as componentes do vetor $\boldsymbol{v}$. Caso queiramos calcular $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u}$ então devemos anotar as componentes do vetor $\boldsymbol{v}$ na segunda linha e as componentes do vetor $\boldsymbol{u}$ na terceira linha (a ordem de indicação das componentes nas respectivas linhas do determinante exige cuidado e atenção, lembre-se que $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = -(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u})$).

Exemplo: Sendo $\boldsymbol{u}$=(2,3,1) e $\boldsymbol{v}$=(3,2,5), temos:

$$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}=(\boldsymbol{i})(3)(5)+(\boldsymbol{j})(1)(3)+(\boldsymbol{k})(2)(2)-(3)(3)(\boldsymbol{k})-(2)(1)(\boldsymbol{i})-(5)(2)(\boldsymbol{j})$$

$$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v} = 15\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k} - 9\boldsymbol{k} - 2\boldsymbol{i} - 10\boldsymbol{j}$$
$$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v} = 13\boldsymbol{i} - 7\boldsymbol{j} - 5\boldsymbol{k}$$

ou então

$$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v} = (13, -7, -5)$$

$$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}=(\boldsymbol{i})(2)(1)+(\boldsymbol{j})(5)(2)+(\boldsymbol{k})(3)(3)-(2)(2)(\boldsymbol{k})-(3)(5)(\boldsymbol{i})-(1)(3)(\boldsymbol{j})$$

$$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u} = 2\boldsymbol{i} + 10\boldsymbol{j} + 9\boldsymbol{k} - 4\boldsymbol{k} - 15\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j}$$
$$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u} = -13\boldsymbol{i} + 7\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}$$

e assim,

$$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u} = (-13, 7, 5)$$

Note claramente nos resultados deste exemplo que $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v} = -(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u})$.

Exemplo: Dados os vetores $\boldsymbol{u}$=(2, 2, 0) e $\boldsymbol{v}$=(0, 1, 1), vamos mostrar que $|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}|=|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\,sen(\theta)$.

No lado esquerdo da igualdade dada temos:

$$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(\boldsymbol{i})(2)(1)+(\boldsymbol{j})(0)(0)+(\boldsymbol{k})(2)(1)-(0)(2)(\boldsymbol{k})-(1)(0)(\boldsymbol{i})-(1)(2)(\boldsymbol{j})$$

$$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$$

ou então

$$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v} = (2, -2, 2).$$

Calculando o módulo do produto vetorial, obtemos,

$$|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}| = |(2, -2, 2)| = \sqrt{(2)^2+(-2)^2+(2)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

No lado direito da igualdade dada temos:

$$|\boldsymbol{u}| = |(2,\ 2,\ 0)| = \sqrt{(2)^2+(2)^2+(0)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$
$$|\boldsymbol{v}| = |(0,\ 1,\ 1)| = \sqrt{(0)^2+(1)^2+(1)^2} = \sqrt{2}\ .$$

Para prosseguir e calcular o seno do ângulo entre os vetores $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ precisamos calcular o referido ângulo, assim, iniciamos calculando o produto escalar entre $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$:

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = (2,2,0) \cdot (0,1,1) = (2)(0)+(2)(1)+(0)(1) = 2$$

e sendo

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u}|\ |\boldsymbol{v}|}\right)$$

temos

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{(2\sqrt{2})(\sqrt{2})}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 60°.$$

Se $\theta = 60°$ então:

$$sen(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

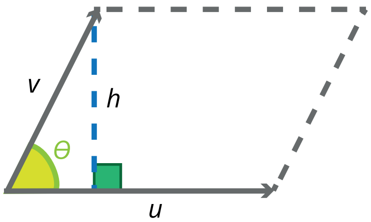
e assim:

$$|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|sen(\theta) = (2\sqrt{2})(\sqrt{2})\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{3} = |\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}|$$

4.2.5.3 Interpretação Geométrica do Módulo do Produto Vetorial

Sejam dois vetores tridimensionais $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$, não nulos e não paralelos, logo, eles determinam um paralelogramo, tal como especificado na Figura 51.

Figura 51 - Paralelogramo determinado pelos vetores $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$



Fonte: Adaptação de Venturini (2015, p. 111).

Pela Geometria Plana temos que a área de um paralelogramo é definida pela fórmula

$A_p = bh$, onde, neste caso temos $b = |\boldsymbol{u}|$ e como $sen(\theta) = \dfrac{h}{|\boldsymbol{v}|}$ escrevemos $h = |\boldsymbol{v}|\, sen(\theta)$.

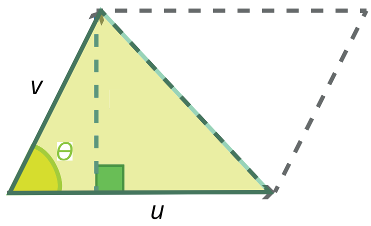
Assim, a fórmula $A_p = bh$ passa a ser escrita como:

$$A_p = |\boldsymbol{u}|\,|\boldsymbol{v}|\, sen(\theta)$$

que é justamente a definição do módulo do produto vetorial entre ***u*** e ***v***, então, podemos concluir que

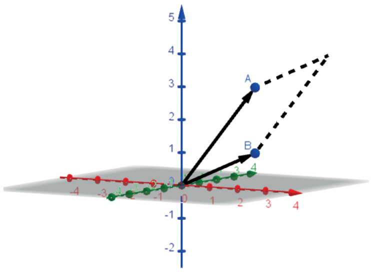
$$A_p = |\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}|$$

Pela Figura 51 (ou pela Figura ao lado) ainda podemos observar que metade do paralelogramo é um triângulo determinado pelos vetores ***u*** e ***v***. Concluímos, portanto, que a área de um triângulo definido a partir de dois vetores tridimensionais pode ser calculada através da fórmula:



$$A_T = \frac{|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}|}{2}$$

Exemplo 1: Um paralelogramo tem um vértice na origem ***O*** (0, 0, 0) e dois lados ***OA*** e ***OB***, sendo os pontos ***A*** (2, 1, 3) e ***B*** (2, 1, 1). Calcule a área do paralelogramo.



Para determinar a área do paralelogramo vamos definir os vetores correspondente aos lados ***OA*** e ***OB*** para em seguida calcular o produto vetorial:

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{OA} = A - O = (2, 1, 3) - (0, 0, 0) = (2, 1, 3)$$
$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{OB} = B - O = (2, 1, 1) - (0, 0, 0) = (2, 1, 1)$$

e assim:

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k} - 2\boldsymbol{k} - 2\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{i}$$

de onde obtemos

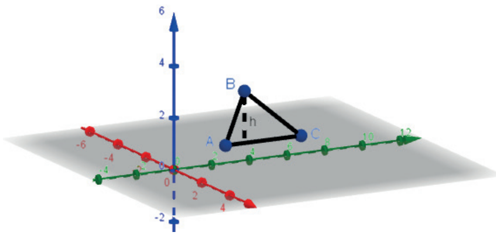
$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = -2\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} = (-2, 4, 0)$$

logo

$$A_p = |\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}| = \sqrt{(-2)^2 + (4)^2 + (0)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

e portanto, a área do paralelogramo é $2\sqrt{5}$ u.a. (unidades de área).

Exemplo 2: Os vértices de um triângulo são os pontos $A(1,2,1)$, $B(1, 3,3)$ e $C(1,6,1)$. Determine a altura relativa ao vértice B.



Pelas fórmulas da Geometria Plana temos que

$$A_T = \frac{(base)(altura)}{2} \Rightarrow A_T = \frac{|\boldsymbol{AC}|h}{2}$$

e pela Álgebra Linear podemos adotar

$$A_T = \frac{|\boldsymbol{AB} \times \boldsymbol{AC}|}{2}$$

Igualando as duas expressões obtemos:

$$\frac{|\boldsymbol{AC}|h}{2} = \frac{|\boldsymbol{AB} \times \boldsymbol{AC}|}{2}$$

e assim, procurando isolar h (altura relativa ao lado $\boldsymbol{AC}$), escrevemos

$$h = \frac{|\boldsymbol{AB} \times \boldsymbol{AC}|}{|\boldsymbol{AC}|}.$$

Basta então calcular estes dois módulos. Iniciamos determinando os vetores $\boldsymbol{AB}$ e $\boldsymbol{AC}$ para cálculo do produto vetorial:

$$\boldsymbol{AB} = B - A = (1, 3, 3) - (1, 2, 1) = (0, 1, 2)$$
$$\boldsymbol{AC} = C - A = (1, 6, 1) - (1, 2, 1) = (0, 4, 0)$$
$$\boldsymbol{AB} \times \boldsymbol{AC} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -8\boldsymbol{i} = (-8,0,0)$$

e então os módulos serão,

$$|\boldsymbol{AB} \times \boldsymbol{AC}| = \sqrt{(-8)^2 + (0)^2 + (0)^2} = 8$$

$$|\boldsymbol{AC}| = \sqrt{(0)^2 + (4)^2 + (0)^2} = 4$$

com isso,

$$h = \frac{|\boldsymbol{AB} \times \boldsymbol{AC}|}{|\boldsymbol{AC}|} = \frac{8}{4} = 2$$

ou seja, a medida da altura relativa ao lado $\boldsymbol{AC}$ corresponde a 2 u.m. (unidades de

4.2.6 Produto Misto

O produto misto de três vetores $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ no espaço tridimensional é um número real, denotado e definido por $[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}] = \boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})$.

4.2.6.1 Expressão Cartesiana do Produto Misto

Sejam $\boldsymbol{u}=(u_x,u_y,u_z)$, $\boldsymbol{v}=(v_x,v_y,v_z)$ e $\boldsymbol{w}=(w_x,w_y,w_z)$ três vetores do espaço tridimensional. Então:

$$v \times w = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = (v_y w_z - v_z w_y)\boldsymbol{i} + (v_x w_z - w_x v_z)\boldsymbol{j} + (v_x w_y - w_x v_y)\boldsymbol{k}$$

ou então,

$$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} = (v_y w_z - v_z w_y,\ v_x w_z - v_x w_z,\ v_x w_y - w_x v_y)$$

e assim, temos para o produto interno a expressão,

$$\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) = u_x(v_y w_z - v_z w_y) + u_y(w_x v_z - v_x w_z) + u_z(v_x w_y - w_x v_y)$$

Sendo que esta expressão $\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})$ é igual ao desenvolvimento do determinante,

$$\begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}$$

então definimos

$$[u, v, w] = u \cdot (v \times w) = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}$$

ou seja, o cálculo do produto misto de três vetores tridimensionais pode ser expresso pelo determinante das componentes dos vetores.

Exemplo: Calcule o produto misto dos vetores $\boldsymbol{u}=(2,3,7)$, $\boldsymbol{v}=(0,-1,3)$ e $\boldsymbol{w}=(1,5,2)$

$$[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}]=\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{v}\times \boldsymbol{w})=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

$$[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}] = (2)(-1)(2)+(3)(3)(1)+(7)(0)(5)-(1)(-1)(7)-(5)(3)(2)-(2)(0)(3)$$
$$[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}] = -4+9+0+7-30-0$$
$$[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}] = -18$$

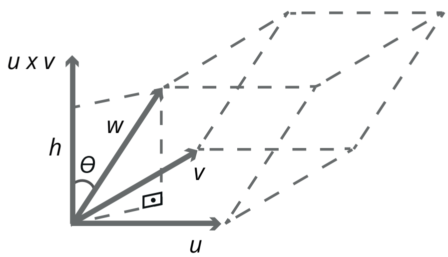
4.2.6.2 Propriedades do Produto Misto

1º) $[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}]=0$ se e somente se um dos três vetores é o vetor nulo ou se os vetores são coplanares.
2º) $[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}]= -[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}]= [\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}]=\ldots$
3º) $[\boldsymbol{u}+\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}]= [\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}]+[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}]$
4º) $[a\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}]= a[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}]$

4.2.6.3 Interpretação Geométrica do Módulo do Produto Misto: Volume de um Paralelepípedo

Sejam $u=(u_x,u_y,u_z)$, $v=(v_x,v_y,v_z)$ e $w=(w_x,w_y,w_z)$ três vetores não coplanares do espaço tridimensional, aplicados a um mesmo ponto A. O volume V do paralelepípedo determinado pelos vetores $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ (veja Figura 52) é igual à área da base (paralelogramo definido por $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ multiplicada pela altura h, assim: $V=Sh$.

Figura 52 - Paralelepípedo determinado pelos vetores u, v e w



Fonte: Adaptação de Cruz.

Sendo θ o ângulo entre $\boldsymbol{w}$ e $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$ temos que

$$cos(\theta)=\frac{h}{|\boldsymbol{w}|}$$

e assim

$$h=|\boldsymbol{w}|\,|cos(\theta)|$$

substituindo a expressão para $cos\ (\theta)$, considerando os vetores $\boldsymbol{w}$ e $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$, escrevemos

$$h = |\boldsymbol{w}|\left|\frac{(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w}}{|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}||\boldsymbol{w}|}\right| = \frac{|(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w}|}{|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}|}$$

então, como a área do paralelogramo (definido pelos vetores $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$) é $\boldsymbol{S}= |\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}|$ escrevemos que o volume do paralelepípedo (área da base vezes altura) determinado pelos vetores $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ é

$$V = |\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}|\frac{|(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w}|}{|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}|}$$

simplificando os termos

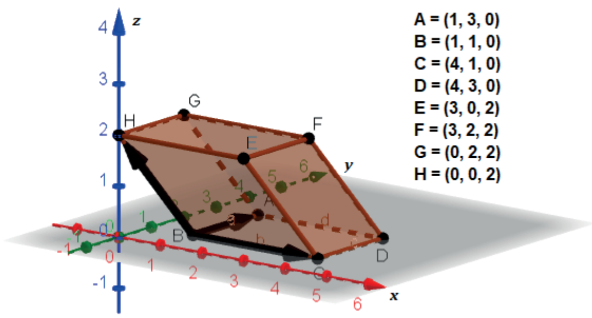
$$\mathrm{V} = |(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w}|$$

ou então

$$\mathrm{V} = |[\boldsymbol{u}, \ \boldsymbol{v}, \ \boldsymbol{w}]|$$

que corresponde, portanto, ao produto misto dos vetores $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$.

Exemplo: Dado o paralelepípedo definido pelos vetores $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{BC}$, $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{BA}$ e $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{BH}$, conforme figura a seguir. Calcule o volume do referido paralelepípedo.



Primeiramente vamos definir as coordenadas dos vetores $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$. Temos:

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{BC} = C - B = (4, 1, 0) - (1, 1, 0) = (3, 0, 0)$$
$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{BA} = A - B = (1, 3, 0) - (1, 1, 0) = (0, 2, 0)$$
$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{BH} = H - B = (0, 0, 2) - (1, 1, 0) = (-1, -1, 2)$$

Definidos os vetores ***u***, ***v*** e ***w*** passamos a calcular o produto misto entre eles:

$$[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}] = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 12$$

lembrando da 8ª propriedade dos determinantes que afirma que se todos os elementos de uma matriz quadrada situados de um mesmo lado da diagonal principal forem nulos, o determinante da matriz será igual ao produto dos elementos da diagonal principal.

Portanto, o volume do paralelepípedo da figura dada é $V = \left|[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}]\right| = |12| = 12$ u.v.

ATENÇÃO

Também podemos calcular o volume de um tetraedro determinado pelos vetores ***u***, ***v*** e ***w***.

Pela Geometria Plana sabemos que o volume de um tetraedro é calculado por:

$$V_T = \frac{1}{3}(\text{área da base do tetraedro})(\text{altura})$$

assim, em decorrência do item anterior, sendo ***S*** a área da base do paralelepípedo escrevemos

$$V_T = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)(altura)$$

$$V_T = \frac{1}{6}(S)(altura)$$

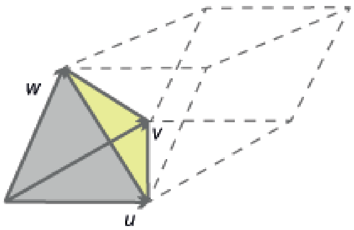
e portanto,

$$V_T = \frac{1}{6}V$$

ou seja, o volume de um tetraedro corresponde a um sexto do volume V de um paralelepípedo determinado pelos vetores ***u***, ***v*** e ***w***.

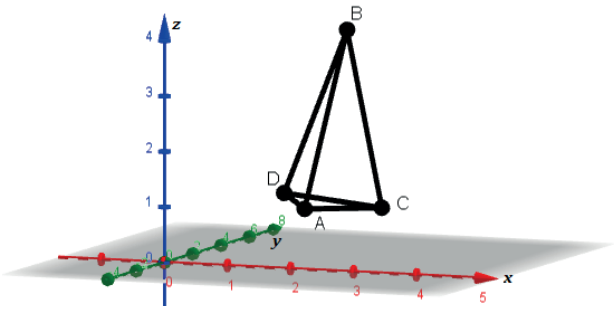
Na Figura 53 temos o esboço de um tetraedro definido a partir dos vetores ***u***, ***v*** e ***w***. Veja que a área da base do referido tetraedro corresponde à metade da área da base do paralelepípedo, e que em termos de volume, temos que volume de um tetraedro corresponde a um sexto do volume do paralelepípedo.

Figura 53 - Tetraedro definido pelos vetores ***u***, ***v*** e ***w***



Fonte: Adaptação de Cruz.

Exemplo: Determine o volume do tetraedro de vértices A=(2,1,1), B=(2,4,4) e C=(3,2,1) e D=(1,4,1) esboçado na figura a seguir.



Os três vetores que determinam este tetraedro poderiam ser:

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{AB} = B - A = (2, 4, 4)-(2, 1, 1) = (0, 3, 3)$$
$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{AC} = C - A = (3, 2, 1)-(2, 1, 1) = (1, 1, 0)$$
$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{AD} = D - A = (1, 4, 1)-(2, 1, 1) = (-1, 3, 0)$$

Definidos os vetores e passamos a calcular o produto misto entre eles:

$$[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}] = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0+0+9+3-0-0=12$$

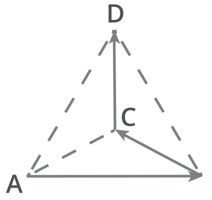
e assim o volume do tetraedro é:

$$V_T = \frac{|[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}]|}{6} = \frac{|12|}{6} = 2\,\boldsymbol{u.v.}$$

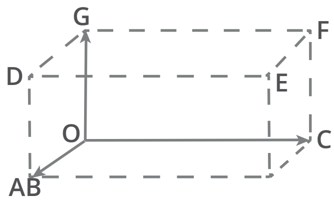
Atividades – Unidade 4

1) (VENTURI, 2015, p. 75) No tetraedro e no paralelepípedo retângulo das figuras a seguir, determinar a soma dos respectivos três vetores representados por suas imagens geométricas.

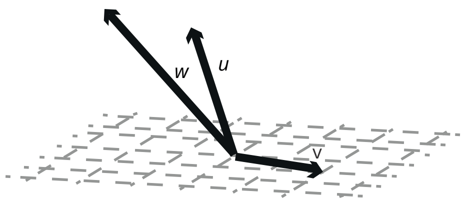
a)



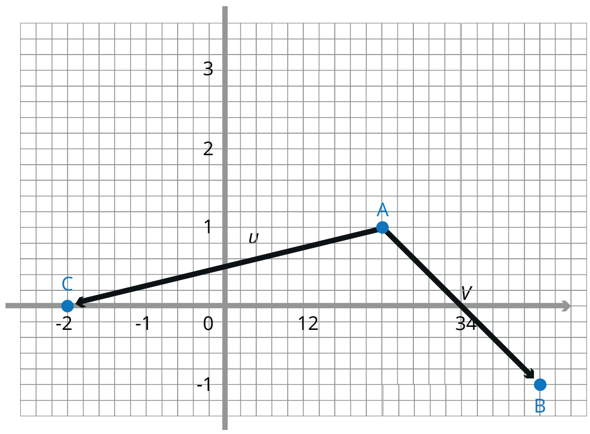
b)



2) Os vetores $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ estão especificados na figura a seguir. Sendo que $\boldsymbol{v}=(1,2,0)$ e $\boldsymbol{u}=(3,0,3)$, então determine as coordenadas do vetor $\boldsymbol{w}$.



3) Dados os pontos $A=(2,1)$, $B=(4,-1)$ e $C=(-2,0)$ no plano cartesiano. Calcular o vetor resultante da soma dos vetores $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{AC}$ e $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{AB}$.



4) Conhecidos os vetores $\boldsymbol{u}=(1,2,0)$, $\boldsymbol{v}=(2,-1,1)$ e $\boldsymbol{w}=(2,0,-6)$, calcular:

a) $2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$

b) $2(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})-(\boldsymbol{w}-\boldsymbol{v})$

c) $\frac{1}{2}\boldsymbol{w}+3(\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v})$

5) Dados dois vetores no plano xy, $\boldsymbol{u} = (4, 3)$ e $\boldsymbol{v} = (3, 6)$, determinar:

a) o vetor soma $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$
b) o módulo do vetor $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$
c) o versor do vetor $\boldsymbol{v}$
d) esboço gráfico dos vetores $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$.

6) Dados os vetores $\boldsymbol{u} = (-2, 3)$, $\boldsymbol{v} = (3, 2)$ e $\boldsymbol{w} = (4, -2)$:

a) represente-os graficamente;
b) determine graficamente o vetor $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$
c) determine o vetor $2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$

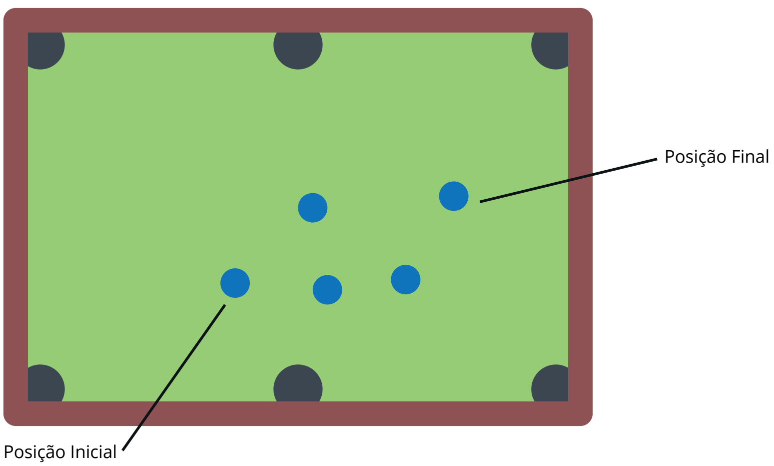
7) Encontre o valor de m para que o vetor $\boldsymbol{v} = (m, -2)$ tenha módulo 4.

8) Calcular os valores de a para que o vetor $\boldsymbol{u} = \left(a, \frac{2}{3}\right)$ seja unitário.

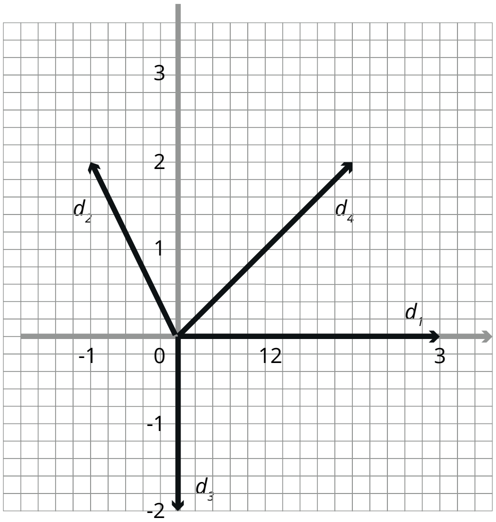
9) Dados os vetores $\boldsymbol{u} = (-2, 1, 0)$, $\boldsymbol{v} = (1, 5, 2)$ e $\boldsymbol{w} = (-2, 1, 5)$, determine:

a) a representação gráfica do vetor $\boldsymbol{v}$
b) determinar $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$

10) (Adaptação de FÍSICA E VESTIBULAR) Uma bola de bilhar sofre quatro deslocamentos sucessivos. Acompanhe na ilustração abaixo a posição inicial e final da referida bola.

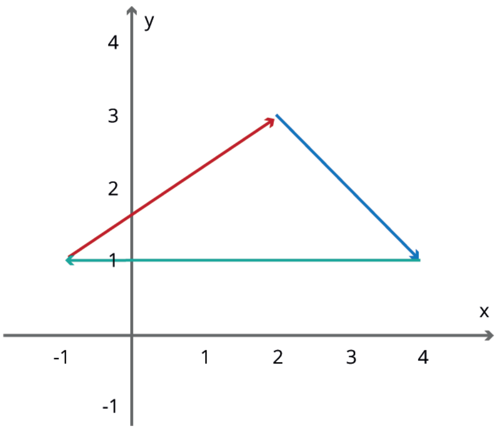


Os deslocamentos sofridos pela bola estão representados pelos vetores $\boldsymbol{d_1}$, $\boldsymbol{d_2}$, $\boldsymbol{d_3}$ e $\boldsymbol{d_4}$ apresentados no diagrama abaixo. Determine o vetor S correspondente ao deslocamento resultante da bola em relação ao ponto de origem.



11) Considere o triângulo cujos vértices estão situados nas extremidades dos vetores esboçados na figura abaixo

a) estabeleça os vetores correspondentes aos três lados do triângulo.
b) qual é o valor do perímetro deste triângulo?



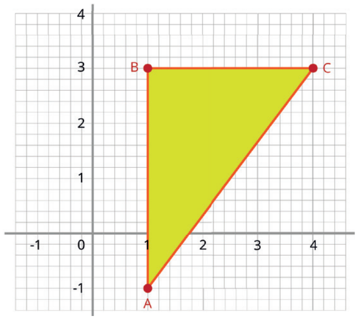
12) Dados dois vetores $\boldsymbol{u}=(1,-1,2)$ e $\boldsymbol{w}=(10,\ 2,-4)$, determine:

a) o ângulo entre os vetores $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{w}$
b) o comprimento do vetor $\boldsymbol{w}$

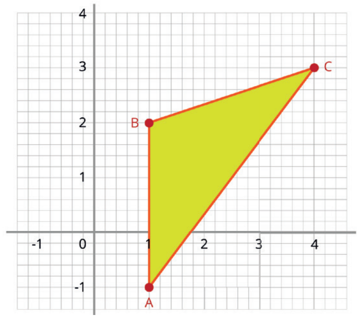
13) Qual a medida do ângulo interno $\hat{B}$ do triângulo ABC, para $A=(2,2,2)$, $B=(4,0,4)$ e $C=(2,6,6)$?

14) Observe os triângulos esboçados nos gráficos a seguir. Através do cálculo de vetores, estabeleça o valor correspondente para área de cada região triangular.

a)



b)

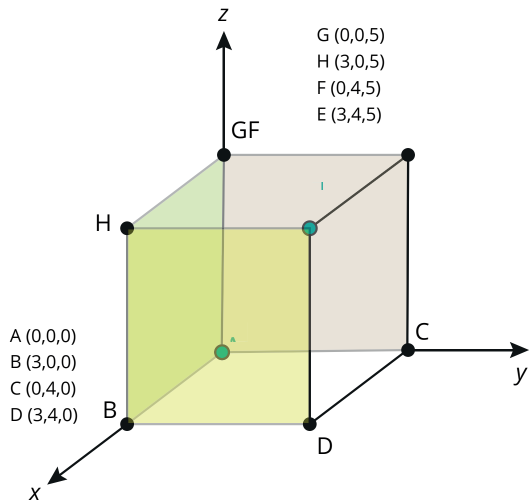


15) Faça no GeoGebra o esboço da região triangular dada pelos pontos $A=(-4,-10)$, $B=(2, 6)$ e $C=(14, -10)$ e calcule utilizando vetores a área da região triangular.

16) Encontrar o volume do paralelepípedo de arestas ***AB***, ***AC*** e ***AD*** sendo $A=(0,2,2)$, $B=(2, 2, 2)$, $C=(2, 0, 4)$ e $D=(4, 6, 6)$.

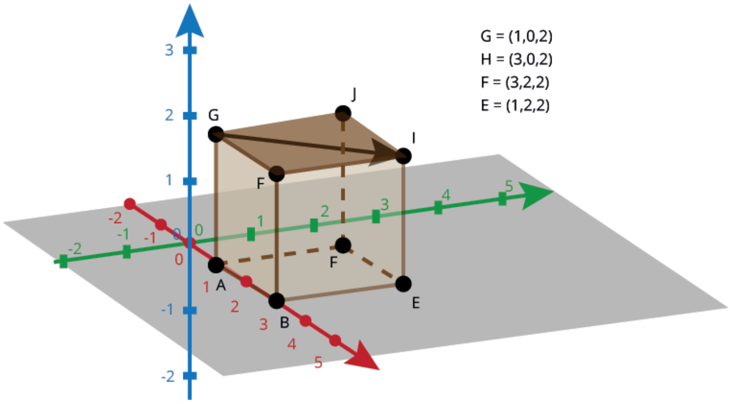
17) Dados $\boldsymbol{u} = (6,-2, 4)$, $\boldsymbol{v} = (4, 2, 0)$ e $\boldsymbol{w} = (0, 2, -2)$ calcular $(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) - (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})$.

18) Calcule o volume do paralelepípedo da figura abaixo.



19) Dada a figura do paralelepípedo determine:

a) as componentes do vetor ***GI*** representado na figura.
b) represente (no espaço tridimensional) um vetor equivalente ao representado na figura, com seu ponto inicial na origem.



Respostas das atividades

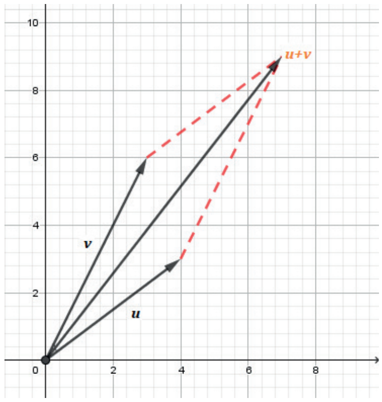
1) a) $\overrightarrow{AD}$ b) $\overrightarrow{OE}$

2) $\boldsymbol{w} = (-2, 2, -3)$

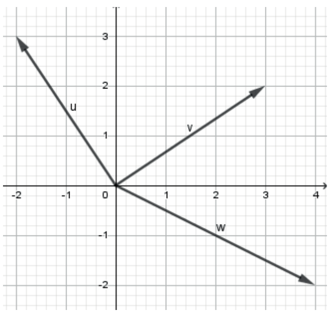
3) $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (-2, -3)$

4) a) $(-2, 7, -9)$ b) $(6, 1, 9)$ c) $(-14, 15, -12)$

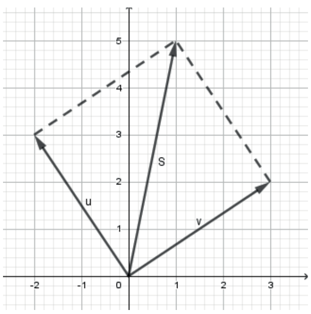
5) a) $(7,9)$ b) $\sqrt{130}$ c) $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ d) Gráfico elaborado no software GeoGebra:



6) a) Na figura a seguir as imagens geométricas dos vetores $\boldsymbol{u} = (-2, 3)$, $\boldsymbol{v} = (3, 2)$ e $\boldsymbol{w} = (4, -2)$



b) Na figura a seguir a imagem geométrica do vetor $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$

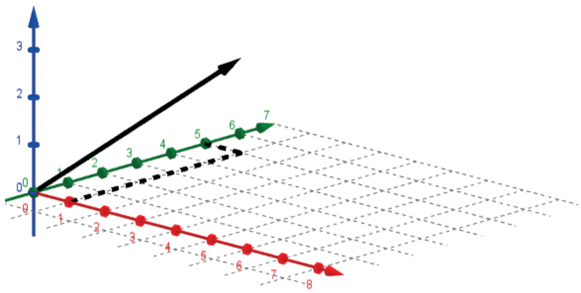


c) $2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}=(-9,-2)$

7) $\boldsymbol{m} = \pm\, \boldsymbol{2\sqrt{3}}$

8) $a = \pm \dfrac{\sqrt{5}}{3}$

9) a) Na figura a seguir a imagem geométrica do vetor $\boldsymbol{v}=(1,5,2)$. Observe que no eixo x temos 1 $u.m.$, no eixo y temos 5 $u.m.$ e no eixo z temos 2 $u.m.$



b) $(-3, 7, 7)$

10) $\boldsymbol{S}=(4, 2)$

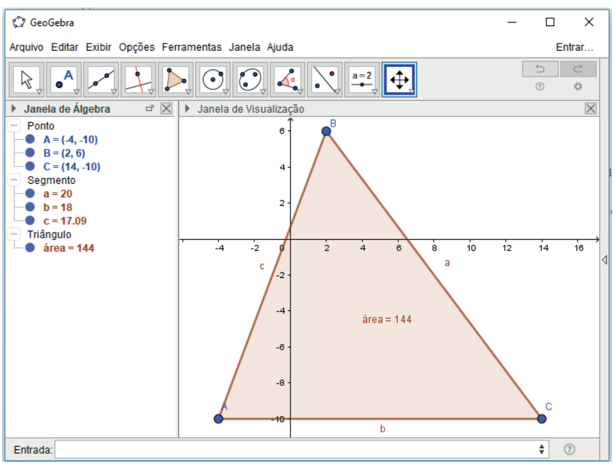
11) a) $\boldsymbol{u}=(3,2)$, $\boldsymbol{v}=(2,-2)$ e $\boldsymbol{w}=(-5,2)$ b) $P=\sqrt{13}+\sqrt{8}+5=11{,}44$ u.m.

12) a) $\theta = 90^{o}$ b) $2\sqrt{30}$

13) $\theta \cong 58{,}52^{o}$

14) a) A = 6 $u.a.$ b) $A = \dfrac{9}{2}$ $u.a.$

15) A= 144 $u.a.$



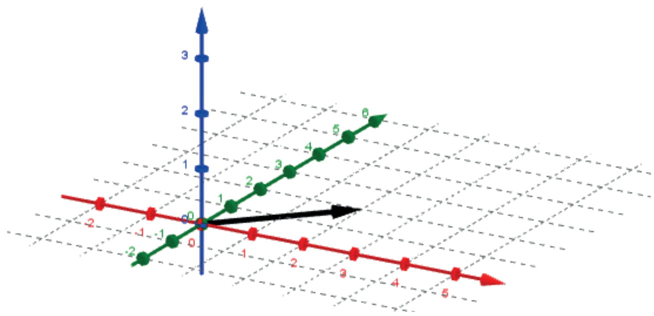
16) 32

17) $(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) - (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) = -4\boldsymbol{i} + 8\boldsymbol{j} + 12\boldsymbol{k} = (-4, 8, 12)$

18) V= 60 *u.v.*

19) a) $\boldsymbol{GI} = I - G = (3, 2, 2) - (1, 0, 2) = (2, 2, 0)$

b) A imagem geométrica de um vetor equivalente ao vetor ***GI***, com ponto inicial na origem, está exposta na figura a seguir.



CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao finalizar os capítulos deste livro esperamos ter cumprido com plenitude o objetivo da disciplina Matemática II do Curso de Licenciatura em Computação, que previa a aplicação dos fundamentos de Álgebra Linear na solução de problemas. Dividimos a totalidade dos tópicos a serem estudados na disciplina em quatro grandes capítulos: Matrizes, Determinantes, Sistemas Lineares e Vetores, sendo que procuramos trabalhar cada um destes tópicos a partir de exemplos e abordagens de uso do software GeoGebra.

Em cada um dos quatro capítulos disponibilizamos uma série de atividades, no intuito de despertar a criatividade, o esforço reflexivo, a capacidade de interpretação e o raciocínio lógico dos acadêmicos.

Nossa forma de organizar os conteúdos dos capítulos do livro esteve focada na aprendizagem matemática, e esperamos que o texto e a disciplina como um todo possam ter realmente proporcionado interações entre os acadêmicos, troca de ideias, compartilhamento das soluções encontradas para os problemas propostos e exposição de raciocínio, que são ações que em nosso ponto de vista constituem o "fazer" matemática na Educação a Distância.

Fica a certeza de que a base matemática trabalhada no decorrer da disciplina de Matemática II será um diferencial para os acadêmicos que almejam sucesso ao longo das demais disciplinas da grade curricular do Curso de Licenciatura em Computação. A Matemática, aliada à Computação, é uma linguagem imprescindível. Não há como imaginar um profissional da Licenciatura em Computação atuando sem que seja conhecedor dos conhecimentos básicos abordados neste livro.

REFERÊNCIAS

ANTON, H. **Álgebra Linear com Aplicações.** Porto Alegre: Bookman, 2006.

ANTON, H.; BUSBY, R. C. **Álgebra Linear Contemporânea**. Porto Alegre: Bookman, 2006.

ANTON, H.; RORRES, C. **Álgebra Linear com Aplicações.** 8. ed. São Paulo: Bookman, 2001.

BRASIL ESCOLA. **Matemática, Classificação de um sistema linear.** Disponível em: <http://brasilescola.uol.com.br/matematica/classificacao-um-sistema-linear.htm>. Acesso em 13 abril de 2017.

BRASIL ESCOLA. **Sistemas Lineares.** Disponível em: <http://brasilescola.uol.com.br/matematica/sistemas-lineares.htm>. Acesso em 20 junho de 2017.

BOLDRINI, J. L.; COSTA, S. I. R.; FIGUEIREDO, V. L.; WETZLER, H. G. **Álgebra Linear.** 3. ed. São Paulo, Harbra, 1980.

CALLIOLI, C. A; DOMINGUES, H. H.; COSTA, R. C. F. **Álgebra Linear e Aplicações.** 7. ed. São Paulo: Atual, 2006.

COPERVES UFSM. **Concursos Anteriores**. Disponível em: <https://www.coperves.com.br/concursos/vestibular_2011/arquivos/Prova_PS2.pdf>. Acesso em 10 maio de 2017.

CRUZ, L. F. **Cálculo Vetorial e Geometria Analítica**. Disponível em: <http://wwwp.fc.unesp.br/~lfcruz/GA_CAP_04.pdf>. Acesso em 12 setembro de 2017.

EDUCAÇÃO.FÍSICA. **Grandezas escalares e vetoriais**. Conceito de Grandeza. Disponível em: <http://educacao.globo.com/fisica/assunto/mecanica/grandezas-escalares-e-vetoriais.html>. Acesso em 10 agosto de 2017.

ENEM. **Provas e Gabaritos**. Caderno ENEM 2012 – 2º dia. Disponível em: <https://oglobo.globo.com/sociedade/educacao/inep-divulga-cadernos-de-prova-do-enem-2012-8682557>. Acesso em 12 abril de 2017.

ESPINOSA, I. C. O. N.; BISCOLLA, L. M. C. C. O.; BARRIERI FILHO, P. **Álgebra Linear para Computação.** Rio de Janeiro: LTC, 2007. Coleção Fundamentos de Informática.

GEOGEBRA. Download. Disponível em: <https://www.geogebra.org/download>. Acesso em 10 abril de 2017.

GIOVANNI, J. R.; BONJORNO, J. R.; GIOVANNI JR, J. R. **Matemática Fundamental:** Uma nova abordagem. São Paulo: FTD, 2002.

INSTITUTO PROMATH, **Sistemas Lineares 2** – Interpretação Geométrica. Posts de Renato Brodzinski. 2013. Disponível em: <http://www.promath.com.br/2013/11/sistemas-lineares-2-interpretacao-geometrica>. Acesso em 12 maio de 2017.

MENEZES, P. B. **Matemática Discreta para Computação e Informática.** Porto Alegre: Bookman, 2010. Série Livros Didáticos – Informática UFRGS.

MUNDO EDUCAÇÃO. **Matemática** – Geometria Analítica. Disponível em: <http://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/norma-ou-modulo-um-vetor.htm>. Acesso em 15 abril de 2017.

PALIGA, A. **Álgebra Linear e Geometria Analítica**. Disponível em: <http://wp.ufpel.edu.br/nucleomatceng/files/2012/07/Vetores1.pdf>. Acesso em 8 novembro de 2018.

POOLE, D. **Álgebra Linear.** Pioneira Thomson Learning, 2004.

SANTOS, N. M. **Vetores e Matrizes:** uma introdução à álgebra linear. São Paulo: Thomson, 2007.

SILVA, L. P. M. **Norma ou Módulo de um Vetor.** Disponível em: <http://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/norma-ou-modulo-um-vetor>. Acesso em 12 setembro de 2017.

SÓ BIOLOGIA. **Grandezas Escalares e Vetoriais.** Disponível em: <http://www.sobiologia.com.br/conteudos/oitava_serie/mecanica8.php>. Acesso em 12 setembro de 2017.

SÓ MATEMÁTICA. **Portal Matemático. Determinantes**. Disponível em: <http://www.somatematica.com.br/emedio/determinantes/determinantes.php>. Acesso em 10 maio de 2017.

SÓ MATEMÁTICA. **Portal Matemático.** Matrizes. Disponível em: <http://www.somatematica.com.br/emedio/matrizes/matrizes.php>. Acesso em 8 abril de 2017.

SÓ MATEMÁTICA. **Portal Matemático.** Sistemas Lineares. Disponível em: <http://www.somatematica.com.br/emedio/sistemas/sistemas.php>. Acesso em 23 julho de 2017.

SÓ MATEMÁTICA. **Portal Matemático**. Vetores. Disponível em: <http://www.somatematica.com.br/emedio/vetores/vetores5.php>. Acesso em 14 novembro de 2017.

SOARES, M. **Vetores.** Disponível em: <http://www.mspc.eng.br/matm/vetor110.shtml>. Acesso em 5 outubro de 2017.

SOUZA, N. L. **Grandezas escalares e vetoriais.** Disponível em: <http://educacao.globo.com/fisica/assunto/mecanica/grandezas-escalares-e-vetoriais.html>. Acesso em 12 setembro de 2017.

STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. **Álgebra Linear.** São Paulo: Pearson Makron Books, 2009.

VENTURI, J. J. **Álgebra Vetorial e Geometria Analítica**. 10 e.d., Curitiba: Livrarias Curitiba. 2015. ISBN: 85.85132-48-5. Disponível no site: <http://www.geometriaanalitica.com.br>. Acesso em 3 dezembro de 2017.

WIKILIVROS. **Matemática elementar/Sistemas lineares**. Disponível em: <https://pt.wikibooks.org/wiki/Matem%C3%A1tica_elementar/Sistemas_lineares>. Acesso em 30 agosto de 2017.

WIKIPEDIA. **Vetor.** Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Vetor_(matemática)>. Acesso em 4 setembro de 2017.

APRESENTAÇÃO DOS AUTORES

A professora Patricia Rodrigues Fortes é licenciada em Matemática pela Universidade Federal de Santa Maria (1997), possui mestrado em Matemática Aplicada (1998) e doutorado em Engenharia Mecânica pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (2003). Trabalhou por 12 anos na URI – Campus de Frederico Westphalen, tendo sido coordenadora do Curso de Licenciatura em Matemática e coordenadora do Comitê de Pesquisa. Em março de 2011, tornou-se professora da Universidade Federal de Santa Maria – UFSM/Campus de Frederico Westphalen, onde trabalha atualmente com disciplinas da área de Matemática. Suas pesquisas relacionam-se à Matemática Aplicada (Fenômenos de Transporte de Partículas) e ao Ensino de Matemática. Trabalha com extensão universitária, associando conhecimentos matemáticos às ações de projetos de Educação Ambiental e de Ensino de Matemática.

A professora Mariza de Camargo possui Graduação em Matemática Licenciatura Plena pela Universidade Federal de Santa Maria (1993-1996), Mestrado em Matemática Aplicada pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (1997-1998) e Doutorado em Engenharia Mecânica pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (1999-2003). Tem experiência na área de Matemática, com ênfase em Matemática Aplicada. Atualmente é professora associada da UFSM no Campus de Frederico Westphalen.

O professor Cristiano Bertolini possui graduação em Ciência da Computação pela Universidade de Passo Fundo (2001), mestrado em Ciência da Computação pela Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul (2005) e doutorado em Ciências da Computação pela Universidade Federal de Pernambuco (2010). Tem experiência na área de Engenharia de Software, com ênfase em Teste de Software, Métodos Formais e Engenharia de Software Experimental. Atualmente é professor adjunto da UFSM no Campus de Frederico Westphalen.

O professor Guilherme Bernardino da Cunha possui graduação em Ciência da Computação, mestrado em Ciências (2003) com Ênfase em Inteligência Artificial e Processamento Digital de Imagens e doutorado em Ciências, com ênfase em Engenharia Biomédica, pela Universidade Federal de Uberlândia. Atualmente é professor Adjunto da Universidade Federal de Santa Maria – Campus Frederico Westphalen. Tem experiência na área de Ciência da Computação, atuando principalmente nos seguintes temas: Engenharia de Software, Inteligência Artificial, Análise de Séries Temporais, Epidemiologia, Banco de Dados, Redes Neurais Artificiais, Algoritmos Genéticos e Bioinformática.